

POLITECNICO DI MILANO



# MECCANICA DEI FLUIDI

ESERCIZI DI DINAMICA DEI FLUIDI

A cura di: Dalila VESCOVI, Diego BERZI

v3.2

# Indice

<b>1</b>	<b>Fluidi ideali</b>	<b>3</b>
1.1	Richiami teorici . . . . .	3
1.1.1	Teorema di Bernoulli . . . . .	4
1.1.2	Estensione del teorema di Bernoulli alle correnti . . . . .	7
1.2	Processi di efflusso . . . . .	10
1.3	Esercizi . . . . .	19
1.3.1	Esercizio 1 . . . . .	19
1.3.2	Esercizio 2 . . . . .	21
1.3.3	Esercizio 3 . . . . .	23
1.3.4	Esercizio 4: getto in atmosfera . . . . .	25
1.4	Spinte dinamiche per fluidi ideali . . . . .	27
1.4.1	Esercizio . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Fluidi reali</b>	<b>31</b>
2.1	Richiami teorici . . . . .	31
2.1.1	Perdite di carico distribuite . . . . .	31
2.1.2	Perdite di carico concentrate . . . . .	38
2.2	Esercizi . . . . .	47
2.2.1	Esercizio 1 . . . . .	47
2.2.2	Esercizio 2 . . . . .	51
2.2.3	Esercizio 3 . . . . .	54
2.2.4	Esercizio 4 . . . . .	56
2.2.5	Esercizio 5 . . . . .	58
2.2.6	Esercizio 6 . . . . .	60
2.2.7	Esercizio 7 . . . . .	63
2.2.8	Esercizio 8 . . . . .	66
2.2.9	Esercizio 9 . . . . .	68
2.3	Spinte dinamiche in condizioni di moto turbolento . . . . .	70
2.3.1	Esercizio 1 . . . . .	72
2.3.2	Esercizio 2 . . . . .	75
2.3.3	Esercizio 3 . . . . .	79

# 1 Fluidi ideali

## 1.1 Richiami teorici

Un fluido in moto si definisce **ideale** quando ha sforzi tangenziali nulli.

Per un fluido **ideale** vale la seguente

### Equazione di Eulero

$$\rho(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{a}}) = \nabla p$$

dove  $\bar{\mathbf{f}}$  è la forza di massa per unità di massa,  $\bar{\mathbf{a}}$  l'accelerazione e  $p$  la pressione.

Se il fluido è anche **pesante** e **incomprimibile**, l'equazione di Eulero diventa

$$\nabla \left( \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{\bar{\mathbf{a}}}{g}$$

Consideriamo ora un sistema di riferimento intrinseco, solidale con la particella di fluido in moto:

- asse  $s$  (tangente): direzione tangente alla traiettoria;
- asse  $n$  (normale): direzione che punta verso il centro del cerchio osculatore della traiettoria;
- asse  $b$  (binormale): ortogonale agli altri due.

Proiettando l'equazione precedente lungo questi tre assi si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{v^2}{rg}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \left( \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

dove  $r$  è il raggio del cerchio osculatore,  $v$  la velocità e  $\frac{v^2}{r}$  è l'accelerazione centripeta.

La terza equazione afferma che la quota piezometrica  $\left( \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right)$  è costante lungo la direzione binormale, per cui, lungo tale direzione, la pressione è distribuita idrostaticamente.

La seconda afferma invece che la quota piezometrica diminuisce in direzione

del centro del cerchio osculatore; all'aumentare della curvatura, ovvero al diminuire del raggio  $r$ , la variazione diventa più sensibile. Quando la curvatura è nulla, cioè  $r \rightarrow \infty$ , le traiettorie sono rettilinee e si parla di corrente gradualmente variata; in questo caso, la quota piezometrica è costante anche lungo la direzione normale. Dunque, nel caso di **corrente gradualmente variata**, la quota piezometrica è costante lungo la sezione trasversale al flusso (piano individuato da  $n$  e  $b$ ).

Dalla prima equazione, nell'ulteriore ipotesi di moto stazionario, si ottiene il seguente:

### 1.1.1 Teorema di Bernoulli

Nelle ipotesi di

- fluido ideale
- fluido incomprimibile
- fluido pesante
- moto stazionario

vale la seguente relazione:

$$H = \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost.}$$

lungo una qualsiasi traiettoria  $s$ .

$H$  è detto **trinomio di Bernoulli** o **carico totale**.

### Interpretazione energetica

Il carico totale  $H$  rappresenta l'energia specifica (per unità di peso) meccanica totale della particella di fluido in moto, ed è data dalla somma di tre contributi:

- $\tilde{z}$ : rappresenta l'energia potenziale gravitazionale (per unità di peso);
- $\frac{p}{\gamma}$ : rappresenta l'energia potenziale dovuta alla pressione (per unità di peso);
- $\frac{v^2}{2g}$ : rappresenta l'energia cinetica (per unità di peso).

La somma  $\left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma}\right)$  è quindi l'energia potenziale (per unità di peso).

Il teorema di Bernoulli afferma allora che l'energia meccanica totale per

unità di peso non cambia lungo una generica traiettoria per un fluido ideale, incomprimibile, pesante in condizioni di moto stazionario.

### Interpretazione geometrica

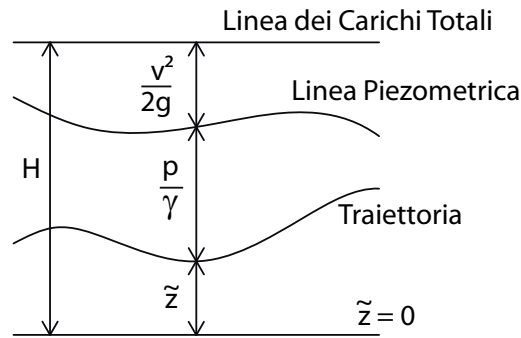


Figura 1: Interpretazione geometrica del teorema di Bernoulli.

### Applicazione: tubo di Pitot

Consideriamo la tubazione ad asse rettilineo e orizzontale rappresentata in Fig. 2. In essa scorre un fluido ideale, in condizioni di moto permanente, con portata  $Q$ . Inoltre, nella tubazione sono inseriti un piezometro comune ed un piezometro ad angolo retto.

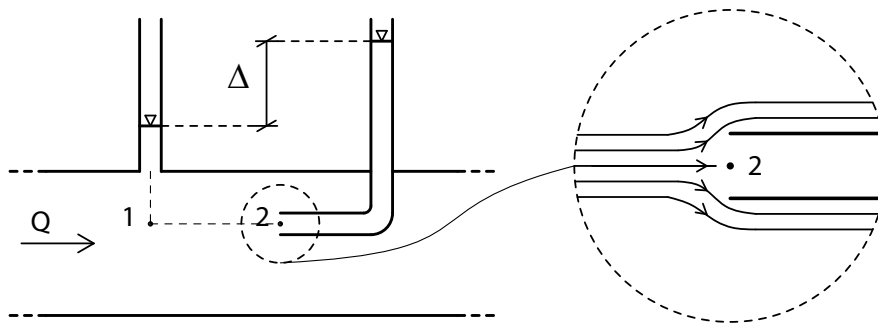


Figura 2: Applicazione del teorema di Bernoulli lungo la traiettoria 1-2.

Si considerino il punto 2, che si trova in corrispondenza dell'imbocco del secondo piezometro e in asse con esso, e il punto 1, allineato con il punto 2 e in asse con il primo piezometro. La corrente, a sufficiente distanza dal secondo piezometro, è caratterizzata da traiettorie rettilinee e parallele, mentre, in prossimità del piezometro, le traiettorie divergono per poterlo aggirare, come illustrato nello zoom di Fig. 2. La generica particella di

fluido che, ad un certo istante, si trova nel punto 1, seguirà una traiettoria rettilinea fino al punto 2. Il punto 2, da cui si diramano infinite traiettorie, è detto punto di ristagno, ed è caratterizzato da velocità nulla:  $v_2 = 0$ . Applichiamo il teorema di Bernoulli lungo la traiettoria che unisce il punto 1 e il punto 2:

$$\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Come già detto,  $v_2 = 0$ , per cui

$$\left( \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Lungo la sezione ortogonale alla corrente che passa per il punto 1, la quota piezometrica si mantiene costante (corrente gradualmente variata) e pari a  $\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma}$ ; per cui la quota piezometrica del fluido fermo contenuto nel primo piezometro è proprio  $\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma}$ . Considerando il secondo piezometro, al suo interno il fluido è fermo, per cui vale la legge di Stevino e la quota piezometrica si mantiene costante e pari a quella della particella nel punto 2,  $\tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma}$ .

Allora, la differenza di quote piezometriche tra i due piezometri coincide con il dislivello  $\Delta$  tra le quote dei menischi dei due piezometri. È interessante notare che la quota del menisco del piezometro collegato al punto 2 rappresenta il carico totale della particella, mentre la quota del menisco dell'altro piezometro rappresenta la sua quota piezometrica. Misurando il dislivello tra le quote dei peli liberi nei due piezometri,  $\Delta$ , si ricava facilmente la velocità nel punto 1:

$$v_1 = \sqrt{2g\Delta}.$$

Nella pratica, questa applicazione del teorema di Bernoulli viene utilizzata per realizzare uno strumento di misura della velocità locale del fluido, detto tubo di Pitot. Uno schema del tubo di Pitot è illustrato in Fig. 3.

Il tubo di Pitot si compone di due tubi concentrici. Il tubo interno ha un foro in corrispondenza del punto di ristagno, detto presa dinamica. Il tubo esterno ha due fori sulla superficie laterale, detti prese statiche, posti sufficientemente lontani dalla presa dinamica, dove le traiettorie della corrente sono rettilinee e parallele. Tramite queste prese, il liquido nella condotta risale all'interno dei due tubi concentrici, e si posiziona a due diverse quote. La quota del pelo libero nel tubo interno visualizza il carico totale, mentre quello nel tubo esterno la quota piezometrica. La differenza  $\Delta$  tra i due livelli è pertanto pari all'altezza cinetica  $v^2/2g$ , per cui è possibile misurare la velocità locale del liquido in corrispondenza dell'asse del tubo di Pitot:

$$v = \sqrt{2g\Delta}.$$

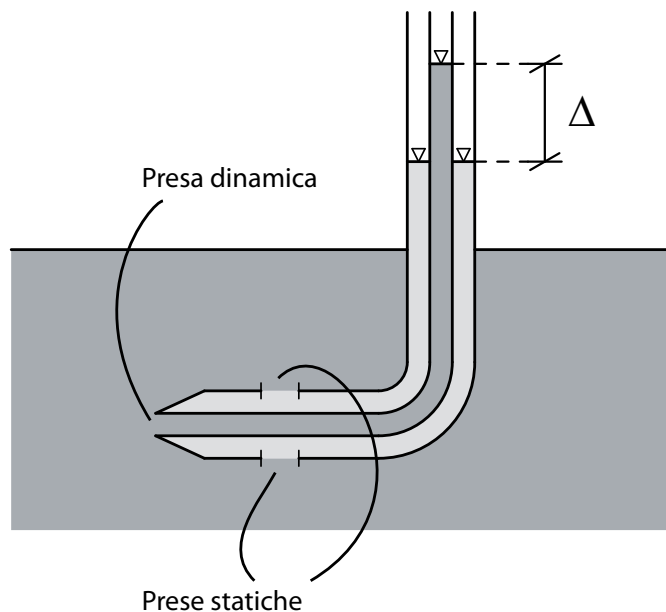


Figura 3: Tubo di Pitot.

### 1.1.2 Estensione del teorema di Bernoulli alle correnti

Data una corrente gradualmente variata di portata  $Q$ , il **carico totale medio della corrente**,  $H_m$ , si mantiene costante su tutte le sezioni trasversali al flusso:

$$H_m = \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} = \text{cost}$$

$H_m$  rappresenta l'energia specifica media del fluido che attraversa la sezione;  $V$  è la velocità media della corrente sulla generica sezione di area  $A$ , ed è definita come

$$V = \frac{1}{A} \int_A v dA;$$

$\alpha$  è detto coefficiente di Coriolis di ragguaglio della potenza cinetica:

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 dA}{V^3 A}.$$

Nel caso di moto stazionario in una condotta cilindrica a sezione circolare:  $\alpha = 1$  se il fluido è ideale;  $\alpha = 2$  se il fluido è reale ed il regime di moto laminare;  $\alpha \cong 1$  se il fluido è reale ed il regime di moto turbolento.

### Applicazione: venturimetro

Il venturimetro è uno strumento che permette di calcolare la portata di una corrente. Il dispositivo, che viene inserito nella condotta in cui si vuole effettuare la misura, è schematizzato in Fig. 4 e si compone di: un convergente, un tratto di condotta di diametro inferiore a quello della condotta originaria, un divergente (che ha lo scopo di riportare il diametro al valore originale) e un manometro differenziale.

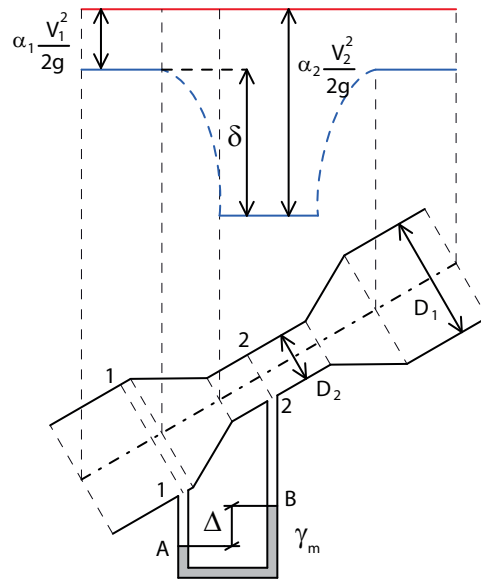


Figura 4: Venturimetro.

Si consideri il tratto di condotta di diametro  $D_1$  illustrato in Fig. 4, in cui è stato inserito il venturimetro (la cui sezione ridotta ha diametro  $D_2$ ), e in cui transita una fluido ideale, in condizioni di moto permanente, con portata  $Q$ . Scriviamo il teorema di Bernoulli esteso alle correnti tra le due sezioni in cui è applicato il manometro, 1 – 1 e 2 – 2

$$\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}.$$

Essendo la corrente gradualmente variata, lungo le sezioni trasversali al flusso, la quota piezometrica si mantiene costante; inoltre, all'interno del manometro i fluidi sono fermi, per cui vale la legge di Stevino. In definitiva,



allora:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} &= \tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma} \\ \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} &= \tilde{z}_B + \frac{p_B}{\gamma} \\ \tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma_m} &= \tilde{z}_B + \frac{p_B}{\gamma_m}\end{aligned}$$

da cui, considerando che  $\tilde{z}_B - \tilde{z}_A = \Delta$ , si ricava

$$\left(\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(\tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}.$$

Per cui, utilizzando il teorema di Bernoulli, si ottiene la seguente relazione:

$$\delta = \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

dove  $\delta$  è la differenza di altezza cinetica tra le due sezioni di condotta a differente diametro, e  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  poiché il fluido è ideale.

La portata si ricava, semplicemente, osservando che  $Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$ :

$$Q = \sqrt{2g\Delta \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)^{-1}}.$$

## 1.2 Processi di efflusso

### Foro circolare ben raccordato su parete orizzontale

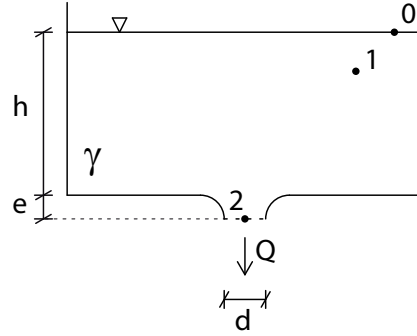


Figura 5: Foro circolare ben raccordato su parete orizzontale.

Si consideri il serbatoio di Fig. 5 riempito di fluido  $\gamma$  (ideale, pesante e incompressibile) fino al livello  $h$ . Sul fondo del serbatoio è presente un foro circolare ben raccordato, il cui diametro della luce di uscita è  $d$ . Dal foro esce una portata di fluido  $Q$ . Si suppone che il volume del serbatoio sia talmente grande che il livello  $h$  resti costante nonostante il volume uscente (questo affinché le condizioni di moto siano permanenti).

Per determinare la portata uscente  $Q$  è necessario individuare una traiettoria di flusso e applicare il teorema di Bernoulli. Consideriamo una particella che si trova inizialmente ferma nel punto 1, sufficientemente lontano dalla luce, e che seguendo una certa traiettoria arriva fino al punto 2, in corrispondenza della sezione ultima della luce. Applicando il teorema di Bernoulli tra 1 e 2 si ottiene:

$$\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

- $v_1 = 0$  poiché nel punto 1 la particella è ferma.
- Se consideriamo il punto 0 sulla superficie del fluido, tra 0 e 1 il fluido è fermo, per cui vale la legge di Stevino:

$$\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \tilde{z}_0.$$

- Il fluido è ideale per ipotesi, per cui per ogni particella vale la legge di Eulero:  $\nabla p = \rho (\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{a}})$ , dove  $\bar{\mathbf{f}}$  e  $\bar{\mathbf{a}}$  sono rispettivamente la forza di volume per unità di massa e l'accelerazione della particella. Inoltre, sempre per ipotesi, il fluido è pesante, ovvero l'unica forza di volume agente è la forza peso, di conseguenza  $\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{g}}$ , dove  $\bar{\mathbf{g}}$  è il vettore accelerazione gravitazionale.

- Le particelle di fluido uscenti dal foro si comportano come un grave in caduta libera, ovvero seguono un moto uniformemente accelerato con accelerazione  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{g}}$ . Quindi, dall'equazione di Eulero, segue che

$$\nabla p = \bar{\mathbf{0}}$$

per ogni particella di fluido in uscita dal foro. Poiché il contorno della vena si trova a contatto con l'atmosfera, ogni punto su di esso ha pressione nulla; segue che  $p = 0$  per ogni particella di fluido uscente dal foro, e in particolare anche sulla sezione di uscita  $p_2 = 0$ .

In definitiva, risulta

$$\tilde{z}_0 = \tilde{z}_2 + \frac{v_2^2}{2g},$$

da cui si ricava la velocità sulla sezione di uscita:

$$v_2 = \sqrt{2g(\tilde{z}_0 - \tilde{z}_2)}.$$

Se  $e$  (lunghezza del raccordo) è molto minore di  $h$ :

$$\tilde{z}_0 - \tilde{z}_2 = h + e \cong h$$

e

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

La velocità in tutti i punti della sezione di uscita è costante (velocità torricelliana). Allora la portata  $Q$  è data da

$$\begin{aligned} Q &= \int_{A_{\text{usc}}} v_2 dA_{\text{usc}} \\ &= v_2 A_{\text{usc}} \\ &= \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

Questa relazione vale per i fluidi ideali; se si misura sperimentalmente la portata effettiva uscente (per un fluido reale),  $Q_{\text{eff}}$  si ottiene

$$Q_{\text{eff}} = C_v \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2gh},$$

dove  $C_v \cong 0.97 \div 0.98$  è detto **coefficiente di perdita**.

Si noti che  $h$  è detto carico sulla luce e rappresenta la differenza di energia potenziale tra la superficie del fluido nel serbatoio e la sezione del foro, che si trasforma in energia cinetica;  $h$  è l'affondamento della sezione d'uscita rispetto al piano dei carichi idrostatici del serbatoio.

Considerando sezioni orizzontali al di sotto della sezione di uscita, su ogni

sezione la velocità locale delle particelle è uniforme e pari a  $\sqrt{2gH}$ , con  $H$  affondamento della sezione rispetto al piano dei carichi idrostatici. Di conseguenza anche la velocità media della sezione è uguale a quella di ogni particella. La velocità delle particelle aumenta verso il basso (aumenta  $H$ ), con accelerazione costante pari alla gravità. Di conseguenza, la velocità media sulle sezioni orizzontali aumenta verso il basso. La portata che attraversa ogni sezione orizzontale di flusso uscente dal foro è costante, dato che il moto è permanente, quindi per l'equazione di continuità, se la velocità media aumenta verso il basso, l'area delle sezioni diminuisce. In definitiva, il getto si restringe indefinitamente verso il basso. Se si considera un fluido reale, ad una certa distanza dalla sezione di uscita, gli effetti di resistenza dell'aria sul flusso diventano non trascurabili e il getto assume un aspetto sempre più irregolare e finisce col frangersi e perdere la propria continuità (il Teorema di Bernoulli non può più ritenersi valido).

### Foro circolare a spigolo vivo su parete orizzontale

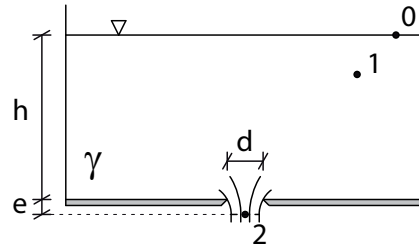


Figura 6: Foro circolare a spigolo vivo su parete orizzontale.

In questo caso sul fondo del serbatoio c'è una luce a spigolo vivo di diametro  $d$ . Poiché le particelle di fluido sono dotate di una certa inerzia, le traiettorie in corrispondenza della sezione di uscita sono curve e il tubo di fluido in uscita tende a contrarsi verso il basso. Ad una certa distanza dal foro,  $e$ , la curvatura delle traiettorie diminuisce notevolmente e le traiettorie assumono una configurazione quasi rettilinea. La sezione di flusso alla distanza  $e$  viene detta sezione contratta, ed è più piccola del foro sul fondo del serbatoio. Dalla sezione contratta in poi, le particelle di fluido si comportano come un grave in caduta libera e l'inerzia viene completamente bilanciata dalla gravità. Per cui, come nell'efflusso precedente, dall'equazione di Eulero si ottiene che ogni particella di fluido al di sotto della sezione contratta ha pressione nulla.

Consideriamo una particella inizialmente ferma, punto 1, e seguiamo la sua traiettoria fino al punto 2 sulla sezione contratta. Applicando il teorema di Bernoulli tra 1 e 2 si ottiene, con gli stessi ragionamenti fatti nel caso precedente:

$$\tilde{z}_0 = \tilde{z}_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

da cui

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

essendo

$$\tilde{z}_0 - \tilde{z}_2 = h + e \cong h.$$

Per cui la velocità è uniforme sulla sezione contratta. La portata si ricava come

$$Q = v_2 A_c$$

dove  $A_c$  è l'area della sezione contratta,

$$A_c = C_c A_{\text{usc}} = C_c \pi \frac{d^2}{4}.$$

$C_c$  è detto **coefficiente di contrazione** e per imbocco a spigolo vivo è circa pari a 0.61 (valore ricavato da Kirchhoff). Per cui

$$Q = C_c \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2gh},$$

e per un fluido reale,

$$Q_{\text{eff}} = C_v C_c \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2gh}.$$

Infine, si definisce

$$\mu = C_v C_c \cong 0.97 \cdot 0.61 \cong 0.60$$

il coefficiente di efflusso per luce circolare a spigolo vivo.

Si noti che le particelle di fluido che si trovano tra la sezione di uscita e la sezione contratta non hanno, in generale, pressione nulla poiché la loro accelerazione non è pari a quella gravitazionale e l'inerzia (non bilanciata dalla gravità) è responsabile della curvatura delle traiettorie (e della conseguente contrazione della vena) in questa regione di flusso.

## Foro circolare a spigolo vivo su parete verticale

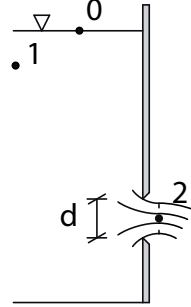


Figura 7: Foro circolare a spigolo vivo su parete verticale.

Anche in questo caso la vena di uscita si contrae subito dopo il foro. Si considera come sezione contratta l'ultima sezione verticale di flusso in corrispondenza della quale la velocità media ha solo componente orizzontale. Da tale sezione in poi, il moto del fluido è uniformemente accelerato con accelerazione pari a quella gravitazionale, ovvero le particelle si comportano come un grave in caduta. Per cui, analogamente agli efflussi da fori su parete orizzontale, dall'equazione di Eulero si ottiene che ogni particella di fluido a valle della sezione contratta ha pressione nulla.

Ancora una volta seguiamo la traiettoria di una particella inizialmente ferma nel punto 1 fino al punto 2 in corrispondenza della sezione contratta. Per il teorema di Bernoulli

$$\tilde{z}_0 = \tilde{z}_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

dato che  $p_2 = 0$ . Allora,

$$v_2 = \sqrt{2g(\tilde{z}_0 - \tilde{z}_2)}.$$

In questo caso  $\tilde{z}_2$  varia lungo la sezione contratta, per cui  $v_2$  non è uniforme. Calcoliamo la portata:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{A_c} v_2 dA_c \\ &= \int_{A_c} \sqrt{2g(\tilde{z}_0 - \tilde{z}_2)} dA_c. \end{aligned}$$

Sia  $G$  il baricentro della sezione contratta e  $\tilde{z}_G$  la sua quota geodetica. Definiamo  $h$  l'affondamento del baricentro della sezione contratta rispetto al piano dei carichi idrostatici del serbatoio (carico sul baricentro della luce):

$$h = \tilde{z}_0 - \tilde{z}_G.$$

Nel caso in cui  $h$  è molto maggiore del diametro del foro  $d$ , allora risulta

$$Q \cong A_c \sqrt{2gh} = C_c \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2gh}.$$

Infine, per fluido reale

$$Q_{\text{eff}} = C_v C_c \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2gh}.$$



### Efflusso sotto battente

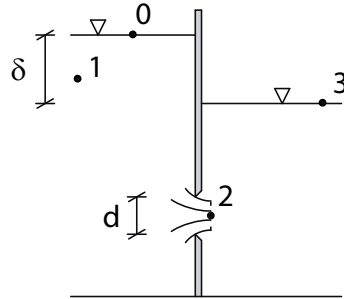


Figura 8: Efflusso sotto battente.

Il serbatoio a sinistra e quello di destra sono collegati da un foro circolare di diametro  $d$ . Il fluido nel serbatoio di destra si trova ad un livello di energia potenziale diverso da quello di sinistra, per cui c'è moto di fluido da sinistra a destra. Inoltre, le condizioni del moto sono permanenti, per cui i due P.C.I. sono fissi e restano a distanza  $\delta$ .

Poiché il foro è a spigolo vivo, si crea una vena contratta di fluido in moto. Dopo il foro il fluido non si trova in atmosfera ma a contatto con il fluido fermo del serbatoio di destra, per cui in corrispondenza della sezione contratta la corrente è gradualmente variata, cioè le traiettorie sono rettilinee e parallele (orizzontali). Applicando il teorema di Bernoulli tra il punto 1 (fermo) e il punto 2 sulla sezione contratta, si ottiene

$$\tilde{z}_0 = \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Poiché sulla sezione contratta la corrente è gradualmente variata, la quota piezometrica è costante, e in particolare è uguale a quella sul contorno della sezione. Sul contorno, il fluido della vena contratta è a contatto con il fluido del serbatoio di destra, che è fermo; per cui, vale la legge di Stevino, e risulta

$$\tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} = \tilde{z}_3,$$

essendo 3 un punto sul P.C.I. del serbatoio di destra. Risulta quindi

$$\tilde{z}_0 = \tilde{z}_3 + \frac{v_2^2}{2g}$$

ed essendo  $\delta = \tilde{z}_0 - \tilde{z}_3$  (eccesso di energia potenziale a disposizione che viene trasformata in energia cinetica), la velocità sulla sezione contratta è uniforme e pari a

$$v_2 = \sqrt{2g\delta}.$$

La portata risulta, quindi,

$$Q = v_2 A_c = C_c \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2g\delta},$$

e, per fluido reale,

$$Q_{\text{eff}} = C_v C_c \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2g\delta}.$$

**Nota:** Il coefficiente di perdita è sempre pari a  $C_v = 0.97 \div 0.98$ , mentre  $C_c = 0.61$  solo per luce a spigolo vivo. Nel caso di tubo addizionale interno,  $C_c = 0.5$ , ovvero l'area contratta è minore.

## Efflusso da paratoia

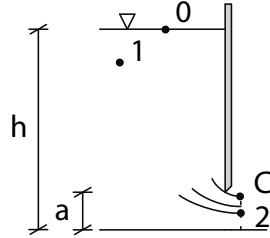


Figura 9: Efflusso da paratoia.

La luce rettangolare, di altezza  $a$  e lunghezza  $L$  (in direzione ortogonale al foglio) si trova in corrispondenza della base del serbatoio. La parete alla base del serbatoio sostiene il fluido in uscita, per cui la contrazione della vena è localizzata nella parte alta. Sulla sezione contratta la corrente è gradualmente variata. Applicando il teorema di Bernoulli tra i punti 1 (fermo) e 2 (sulla sezione contratta), si ottiene

$$\tilde{z}_0 = \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Sulla sezione contratta la quota piezometrica è costante, per cui nel generico punto 2 è uguale a quella nel punto  $C$  (Fig. 9) che si trova all'estremità superiore della sezione, e che è a contatto con l'atmosfera:

$$\tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} = \tilde{z}_C$$

da cui segue

$$\tilde{z}_0 = \tilde{z}_C + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Allora,

$$v_2 = \sqrt{2g(\tilde{z}_0 - \tilde{z}_C)} = \sqrt{2g(h - C_c a)}.$$

All'aumentare dell'altezza della luce  $a$ , la velocità d'uscita diminuisce. La portata risulta pari a

$$Q = A_c v_2 = C_c a L \sqrt{2g(h - C_c a)},$$

e, per fluido reale,

$$Q_{\text{eff}} = C_v C_c a L \sqrt{2g(h - C_c a)}.$$

### 1.3 Esercizi

#### 1.3.1 Esercizio 1

Si consideri la condotta di Fig. 10, di diametro  $D$  e dotata di imbocco ben raccordato, dove scorre una portata  $Q$  da sinistra verso destra. Tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica nel caso di moto permanente di un fluido ideale, pesante ed incompressibile.

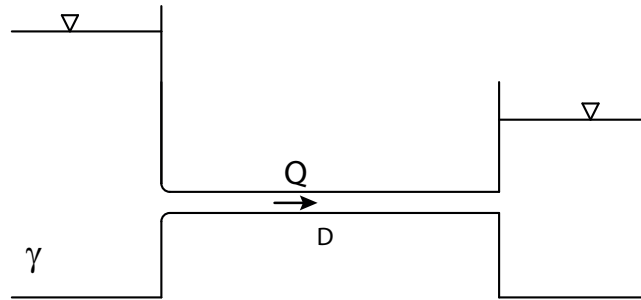


Figura 10: Esercizio 1.

#### Svolgimento:

Essendo il fluido ideale, vale il teorema di Bernoulli per le correnti, per cui il carico totale medio si mantiene costante:

$$H_m = \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} = \text{cost}$$

dove  $\alpha = 1$  e su tutte le sezioni di corrente gradualmente variata  $V = Q/A$  con  $A = \pi D^2/4$ . Consideriamo il punto  $O$ , posto in corrispondenza del baricentro della prima sezione di condotta, a contatto con il fluido fermo nel serbatoio di monte (Fig. 11). Si ipotizza che in questo punto, e in tutta la prima sezione di condotta, il fluido sia fermo, come in tutto il serbatoio, per cui  $V_O = 0$ . Considerando il punto  $M$  sul pelo libero del serbatoio di monte e applicando la legge di Stevino tra  $O$  e  $M$ , si ha che  $\tilde{z}_O + \frac{p_O}{\gamma} = \tilde{z}_M$ . Per cui, il carico totale medio della prima sezione risulta

$$H_{m,O} = \tilde{z}_O + \frac{p_O}{\gamma} + \alpha \frac{V_O^2}{2g} = \tilde{z}_M.$$

Allora, su tutta la condotta,

$$H_m = \tilde{z}_M$$

e la linea dei carichi totali è una retta orizzontale all'altezza del pelo libero del serbatoio di monte (linea rossa in Fig. 11).

Per tracciare la linea piezometrica, basta considerare che questa dista, in

ogni sezione gradualmente variata,  $\alpha \frac{V^2}{2g}$  dalla linea dei carichi totali. In questo caso la condotta ha sezione costante, per cui, essendo il moto permanente, anche la velocità media  $V$  è costante. Allora, la distanza tra la piezometrica e la linea dei carichi totali si mantiene costante e pari a  $\alpha \frac{V^2}{2g}$  su tutto il tratto di condotta. Consideriamo il punto  $U$ , posto in corrispondenza del baricentro dell'ultima sezione di condotta, subito prima del serbatoio di valle. Su tale sezione la corrente è gradualmente variata, per cui la quota piezometrica è costante e pari a quella sul contorno della sezione stessa. Tale contorno si trova a contatto con il fluido del serbatoio di destra, che è fermo. Allora tra i punti del contorno e tutti i punti del serbatoio vale la legge di Stevino. In particolare, considerando il punto  $V$  sul pelo libero del serbatoio di valle, deve risultare

$$\tilde{z}_U + \frac{p_U}{\gamma} = \tilde{z}_V.$$

Pertanto, la piezometrica si trova alla quota del piano dei carichi idrostatici del serbatoio di valle. Inoltre,  $\tilde{z}_M - \tilde{z}_V = \alpha \frac{V^2}{2g}$ .

Dal punto  $M$  (dove la quota piezometrica vale  $\tilde{z}_M$ ) fino ad un breve tratto dopo l'imbocco, la corrente non è gradualmente variata e non è possibile tracciare con esattezza la piezometrica. In questo tratto si raccordano i punti noti con una curva qualitativa che si disegna tratteggiata. La linea blu di Fig. 11 rappresenta la piezometrica tra il punto  $M$  e il punto  $U$ .

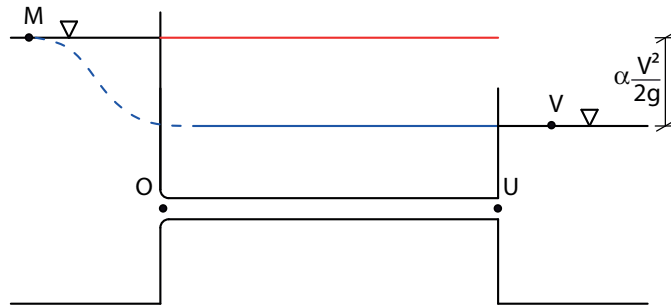


Figura 11: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 1.

### 1.3.2 Esercizio 2

Si consideri la condotta di Fig. 12, dotata di imbocco ben raccordato che sbocca in atmosfera. Si consideri fluido ideale, pesante e incompressibile in condizioni di moto permanente. Si traccino la linea dei carichi totali e la piezometrica.

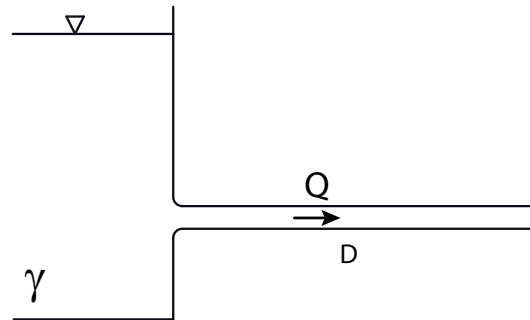


Figura 12: Esercizio 2.

#### Svolgimento:

Anche in questo caso, essendo il fluido ideale, il carico totale medio è costante e pari a quello nel serbatoio di monte:

$$H_m = H_{m,M} = \tilde{z}_M$$

essendo  $M$  un punto sul pelo libero del serbatoio.

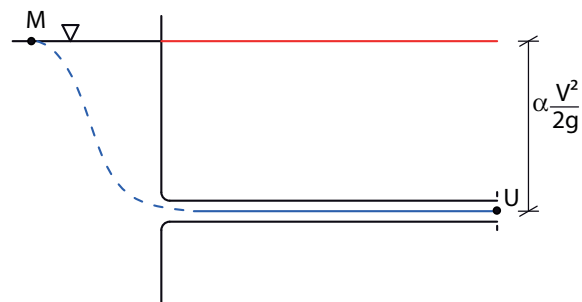


Figura 13: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 2.

Analogamente all'esercizio precedente, la piezometrica è una linea orizzontale che si mantiene a distanza  $\alpha \frac{V^2}{2g}$  dalla linea dei carichi totali. Per determinare la posizione della piezometrica, consideriamo il punto  $U$  in corrispondenza della sezione di uscita del fluido. Analogamente al caso di efflusso

su luce verticale, deve risultare  $p_U = 0$  poiché il flusso si comporta come un grave in caduta. Allora la piezometrica, su tutte le sezioni ove la corrente è gradualmente variata, è pari a  $\tilde{z} = \tilde{z}_U$ , ovvero è una linea orizzontale coincidente con l'asse della condotta. Analogamente all'esercizio precedente, il tratto di piezometrica tra il punto  $M$  (dove la quota piezometrica è pari a  $\tilde{z}_M$ ) e il primo punto sull'asse della condotta in cui la corrente diventa gradualmente variata (quota piezometrica pari a  $\tilde{z}_U$ ) viene disegnato con un raccordo tratteggiato. In Fig. 13 sono riportate la linea dei carichi totali in rosso e la linea piezometrica in blu.

### 1.3.3 Esercizio 3

Si consideri il sistema di Fig. 14. Tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica per la condotta nel caso di moto permanente di un fluido ideale. Si consideri  $D_1 < D_3 < D_4 < D_2$ .

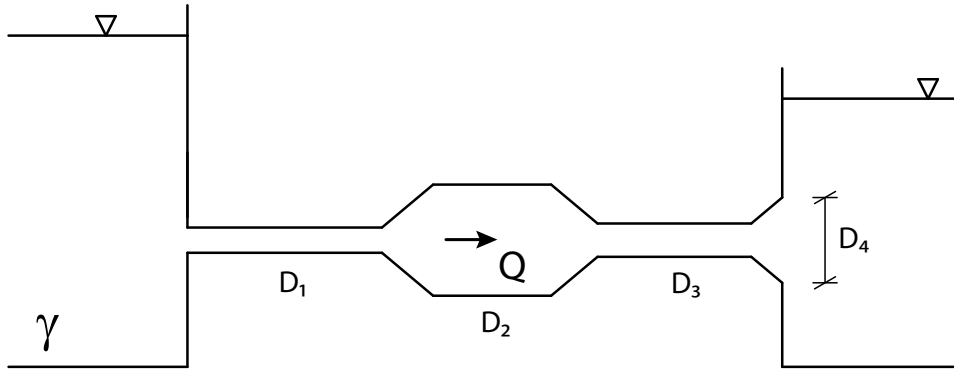


Figura 14: Esercizio 3.

#### Svolgimento:

Per il teorema di Bernoulli, la linea dei carichi totali è orizzontale ed il carico totale è pari a quello del serbatoio di monte:

$$H_m = H_{m,M} = \tilde{z}_M.$$

Nell'esercizio 3 sono presenti più tubi di diverso diametro. Le velocità nei vari tratti di tubo sono diverse, dato che sono diversi i diametri, e si calcolano come

$$V_i = \frac{Q}{A_i} = \frac{4Q}{\pi D_i^2} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

In ogni tratto di tubo ove la corrente è gradualmente variata, la distanza tra la piezometrica e la linea dei carichi totali è pari all'altezza cinetica. Allora, partendo da valle, la condizione al contorno per il tracciamento della piezometrica si trova in corrispondenza del pelo libero del serbatoio di valle e dista dalla linea dei carichi totali  $V_4^2/2g$  ( $V_4$  è la velocità sull'ultima sezione, di diametro  $D_4$ , prima dello sbocco). Nei tratti di diametro  $D_3$ ,  $D_2$  e  $D_1$  (ove la corrente è gradualmente variata) la distanza tra piezometrica e linea dei carichi totali è, rispettivamente,  $V_3^2/2g$ ,  $V_2^2/2g$  e  $V_1^2/2g$ . Si noti che quando il diametro diminuisce, la corrente accelera ( $V$  aumenta) e quindi piezometrica e linea dei carichi totali si allontanano (aumenta la distanza  $V^2/2g$ ).

Nei tratti dove la corrente non è gradualmente variata, la piezometrica viene disegnata tratteggiata. In particolare, all'imbocco si verifica un restringimento della vena e quindi si disegna un uncino piezometrico (Fig. 15).



La linea piezometrica subisce una forte caduta verso il basso, raggiunge un minimo, poi risale fino ad incontrare il tratto orizzontale a valle. La spiegazione di questo andamento verrà data in seguito (si veda il capitolo dedicato alle perdite concentrate per fluidi reali).

In Fig. 15 sono riportati gli andamenti della linea dei carichi totali (in rosso) e della piezometrica (in blu).

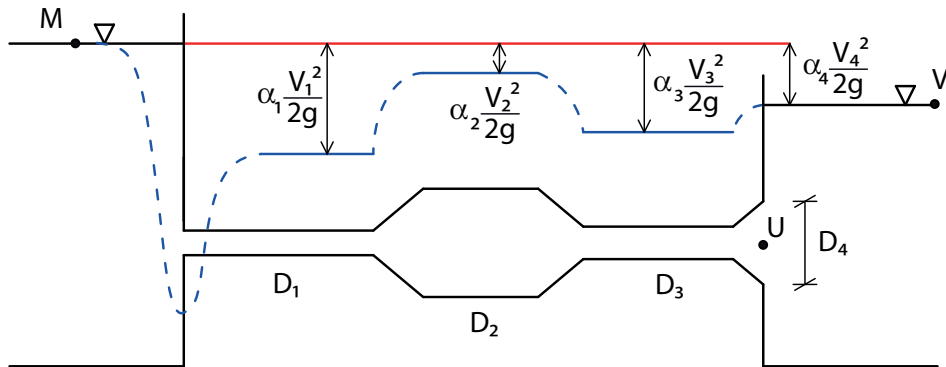


Figura 15: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 3.

### 1.3.4 Esercizio 4: getto in atmosfera

Si consideri il getto in atmosfera di Fig. 16. Nelle ipotesi di fluido ideale, pesante e incomprimibile e supponendo di trascurare l'attrito dell'aria con il fluido, determinare l'altezza massima  $h$  raggiunta dal getto. Si considerino noti: i diametri  $D_1$  e  $D_2$  delle sezioni 1-1 e 2-2 rispettivamente, la lettura del manometro  $n$ , la quota geodetica del suo baricentro  $\tilde{z}_n$ , l'inclinazione del tubo  $\beta$  e la distanza verticale tra il baricentro del manometro e il baricentro della sezione 2-2,  $a$ .

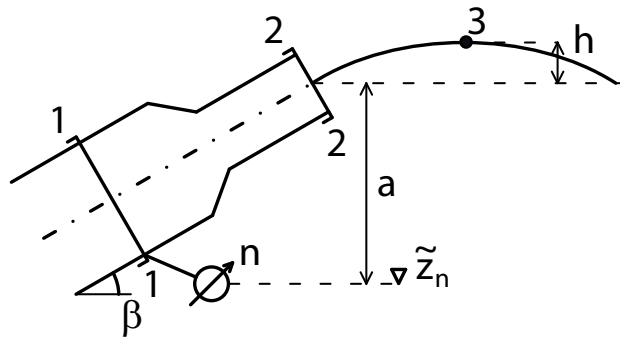


Figura 16: Esercizio 4: getto in atmosfera.

#### Svolgimento:

Sia 3 il punto di massima altezza del getto. Allora  $h = \tilde{z}_3 - \tilde{z}_2$ .

A valle della sezione 2-2 il restringimento della vena fluida può essere trascurato (sezione contratta) poiché, a differenza dell'efflusso, la corrente proviene da una condotta ove le traiettorie sono rettilinee e parallele. Per cui, in corrispondenza della sezione 2-2 la corrente si considera gradualmente variata. Appliciamo il teorema di Bernoulli esteso alle correnti tra il baricentro della sezione 1-1 e il baricentro della sezione 2-2:

$$\tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha \frac{V_2^2}{2g} = \tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha \frac{V_1^2}{2g},$$

dove  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1$  essendo il fluido ideale.

Lungo la sezione 1-1 la corrente è gradualmente variata, per cui la quota piezometrica è costante. In corrispondenza di tale sezione è applicato un manometro, all'interno del quale il fluido è fermo, per cui vale la legge di Stevino; allora

$$\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \tilde{z}_n + \frac{n}{\gamma}.$$

Lungo la sezione 2-2 la pressione è nulla,  $p_2 = 0$  (analogamente al caso di efflusso su luce verticale). Risulta quindi

$$\tilde{z}_2 + \alpha \frac{V_2^2}{2g} = \tilde{z}_n + \frac{n}{\gamma} + \alpha \frac{V_1^2}{2g}.$$

Siano  $A_1 = \pi D_1^2/4$  e  $A_2 = \pi D_2^2/4$  le aree delle due sezioni; allora  $V_1 = Q/A_1$  e  $V_2 = Q/A_2$ , dove  $Q$  è la portata circolante. Inoltre,  $\tilde{z}_2 - \tilde{z}_n = a$ . Sostituendo si ottiene

$$\frac{n}{\gamma} - a = \alpha \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right),$$

da cui si ricava la portata,

$$Q = \sqrt{2g \left( \frac{n}{\gamma} - a \right) \left( \frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)^{-1}}.$$

Applichiamo ora il teorema di Bernoulli per le correnti tra le sezioni 2 – 2 e 3 – 3:

$$\tilde{z}_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \alpha \frac{V_3^2}{2g} = \tilde{z}_2 + \alpha \frac{V_2^2}{2g}.$$

In tutti i punti del getto libero, compreso il punto 3, il moto è uniformemente accelerato verso il basso, per cui il gradiente di pressione è nullo, e, dato che il contorno della vena fluida è a contatto con l'atmosfera,  $p = 0$ . Risulta, allora,

$$h = \tilde{z}_3 - \tilde{z}_2 = \frac{\alpha}{2g} (V_2^2 - V_3^2).$$

La componente orizzontale della velocità in un generico punto del getto segue un moto rettilineo uniforme, mentre quella verticale un moto uniformemente accelerato. Il punto 3 si trova sul vertice della parabola che rappresenta l'asse della corrente, per cui lì le particelle hanno solo velocità orizzontale, pari alla componente orizzontale della velocità delle particelle in uscita dalla tubazione. Dalla geometria si ricava, dunque, che  $V_3 = V_2 \cos \beta$ . In definitiva,

$$h = \alpha \frac{V_2^2}{2g} (1 - \cos^2 \beta).$$

## 1.4 Spinte dinamiche per fluidi ideali

Dato un volume  $W$  di fluido in moto con velocità  $\bar{\mathbf{v}}$ , vale la seguente

### Equazione globale dell'equilibrio dinamico

$$\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{\Pi}} + \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{0}}$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}} &= - \int_W \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} dW && \text{risultante delle inerzie locali} \\ \bar{\mathbf{\Pi}} &= \int_A \bar{\mathbf{\Phi}}_n dA && \text{spinta esercitata dall'esterno sulla superficie di contorno } A \\ \bar{\mathbf{G}} &= \int_W \rho \bar{\mathbf{f}} dW && \text{forza di massa} \\ \bar{\mathbf{M}} &= \int_A \rho v_n \bar{\mathbf{v}} dA && \text{flusso di quantità di moto attraverso il contorno } A. \end{aligned}$$

Dove  $\bar{\mathbf{\Phi}}_n$  è lo sforzo agente sulla superficie di contorno  $A$  di normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , e  $v_n = \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  è la componente della velocità  $\bar{\mathbf{v}}$  in direzione normale alla superficie.

In condizioni di moto permanente, le inerzie locali sono nulle:  $\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{0}}$ .

Nel caso di fluido ideale, la spinta  $\bar{\mathbf{\Pi}}$  è pari alla risultante delle pressioni agenti sul contorno, per cui

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \int_A p \hat{\mathbf{n}} dA.$$

Se si considera una sezione (piana) trasversale a una corrente lineare, allora la velocità è ortogonale alla superficie e  $v_n = v$ . In questo caso

$$\bar{\mathbf{M}} = \int_A \rho v^2 dA \hat{\mathbf{n}}.$$

La velocità  $v$  varia sulla superficie  $A$ ; facendo riferimento alla velocità media  $V$ , definita come rapporto tra la portata  $Q$  e l'area della condotta  $A$ , si ottiene

$$\bar{\mathbf{M}} = \beta \rho Q V \hat{\mathbf{n}}$$

dove

$$\beta = \frac{\int_A v^2 dA}{V^2 A}$$

è detto coefficiente di ragguglio del flusso di quantità di moto, ed è pari ad 1 nel caso di fluido ideale.

### 1.4.1 Esercizio

Nel sistema in Fig. 17, posto in un piano verticale, defluisce un fluido in condizioni di moto permanente. Determinare la spinta scaricata sulla flangia 1 – 1 in condizioni di fluido ideale.

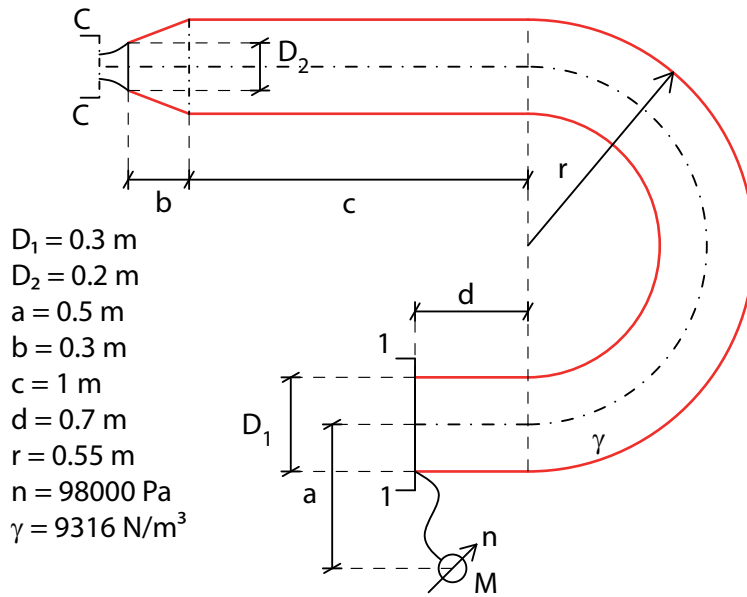


Figura 17: Esercizio sulle spinte dinamiche per fluidi ideali.

### Svolgimento:

Calcoliamo la portata  $Q$  transitante all'interno della condotta. Applichiamo il teorema di Bernoulli tra la flangia (sezione 1 – 1) e la sezione contratta,  $C - C$ , che si forma a valle dello sbocco:

$$\tilde{z}_C + \frac{p_C}{\gamma} + \alpha \frac{V_C^2}{2g} = \tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha \frac{V_1^2}{2g}.$$

La pressione nel baricentro della sezione contratta è nulla,  $p_C = 0$ , come visto nell'esercizio precedente, inoltre,

$$\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \tilde{z}_M + \frac{n}{\gamma}$$

poiché sulla sezione 1 – 1 la corrente è gradualmente variata e, quindi la distribuzione delle pressioni è idrostatica così come all'interno del manometro ( $\tilde{z}_M$  è la quota geodetica del baricentro del manometro). La pressione  $p_1$  risulta pertanto

$$p_1 = n - \gamma (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_M) = n - \gamma a.$$

Applicando l'equazione di continuità, si ottiene

$$\alpha \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{C_c^2 A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) = \frac{n}{\gamma} - (\tilde{z}_C - \tilde{z}_M).$$

Dalla geometria si determina facilmente che

$$\tilde{z}_C - \tilde{z}_M = 2r + a,$$

per cui la portata risulta

$$Q = \sqrt{\frac{2g}{\alpha} \left( \frac{n}{\gamma} - a - 2r \right) \left( \frac{1}{C_c^2 A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right)^{-1}} = 0.38 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Sulla flangia si scarica la spinta  $\bar{\mathbf{S}}$  esercitata dal fluido su tutta la superficie laterale della condotta. Consideriamo un volume di controllo compreso tra la flangia, sezione 1-1, e la sezione contratta (Fig. 18).

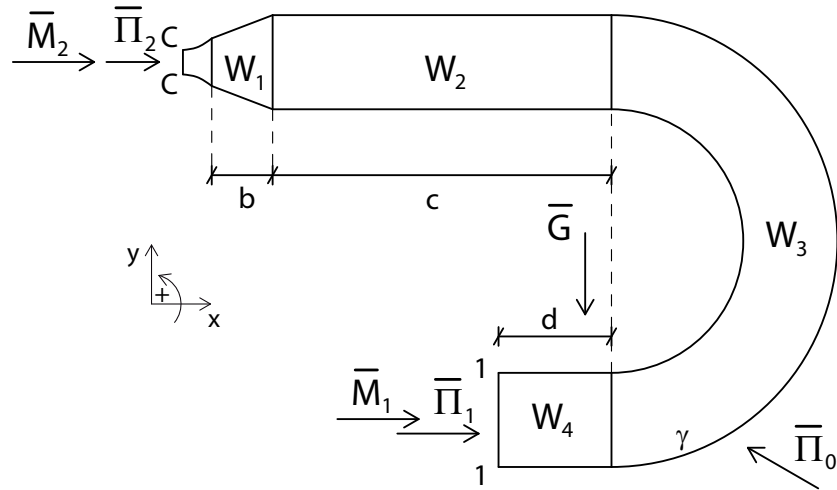


Figura 18: Volume di controllo per l'esercizio sulle spinte dinamiche per fluidi ideali.

Per l'equazione globale dell'equilibrio dinamico,

$$\bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_2 = \bar{\mathbf{0}}.$$

La spinta cercata,  $\bar{\mathbf{S}}$ , è quella esercitata dal fluido sulla superficie, per cui

$$\bar{\mathbf{S}} = -\bar{\Pi}_0 = \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_2$$

e proiettando lungo gli assi  $x$  e  $y$ , si ottiene

$$\begin{aligned} S_x &= \Pi_{1,x} + \Pi_{2,x} + M_{1,x} + M_{2,x} \\ S_y &= G_y. \end{aligned}$$

Calcoliamo i contributi:

$$G_y = -\gamma W$$

dove  $W$  è il volume del tratto di condotta, che possiamo calcolare come somma di 4 termini:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4,$$

dove

$$W_1 = \frac{\pi}{12} b (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2) = 0.015 \text{ m}^3$$

volume del tronco di cono,

$$W_2 = \pi \frac{D_1^2}{4} c = 0.071 \text{ m}^3$$

volume del cilindro di lunghezza  $c$ ,

$$W_3 = \frac{1}{2} 2\pi^2 r \frac{D_1^2}{4} = 0.122 \text{ m}^3$$

volume dell'arco di toro,

$$W_4 = \pi \frac{D_1^2}{4} d = 0.05 \text{ m}^3$$

volume del cilindro di lunghezza  $d$ , e avendo trascurato il volume compreso tra la sezione di uscita e la sezione contratta. Allora risulta

$$G_y = -\gamma (W_1 + W_2 + W_3 + W_4) = -2396 \text{ N}.$$

La spinta sulla superficie piana 1 - 1 è pari a

$$\Pi_{1,x} = p_1 A_1 = (n - \gamma a) \pi \frac{D_1^2}{4} = 6597 \text{ N},$$

e quella sulla sezione contratta  $C - C$

$$\Pi_{2,x} = p_C A_C = 0,$$

essendo  $p_C = 0$  e  $A_C = C_c A_2$ .

Calcoliamo i flussi di quantità di moto:

$$M_{1,x} = \beta \rho \frac{Q^2}{A_1} = 1956 \text{ N}$$

$$M_{2,x} = \beta \rho \frac{Q^2}{C_c A_2} = 5177 \text{ N}.$$

La spinta esercitata dal fluido sulla flangia risulta quindi essere:

$$S_x = p_1 A_1 + \rho \frac{Q^2}{A_1} + \rho \frac{Q^2}{C_c A_2} = 13730 \text{ N}$$

$$S_y = -\gamma W = -2396 \text{ N}$$

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 13938 \text{ N}.$$

## 2 Fluidi reali

### 2.1 Richiami teorici

In generale per un fluido reale l'energia non si conserva ma diminuisce lungo la traiettoria a causa degli attriti.

#### 2.1.1 Perdite di carico distribuite

La perdita di carico distribuita lungo una condotta di lunghezza  $L$  e diametro costante  $D$  è pari a

$$\Delta H_m = JL,$$

$J$  è detta **cadente** ed è definita, per condotte cilindriche a sezione circolare, dalla seguente **formula di Darcy-Weissbach**:

$$J = \lambda \frac{V^2}{2gD}$$

dove  $V$  è la velocità media della corrente e  $\lambda$  è l'**indice di resistenza ridotta**. Tale indice varia in funzione di due grandezze: la scabrezza relativa della tubazione,  $r/D$ , e il numero di Reynolds,  $\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}$ .

Per determinare  $\lambda$ , una volta noti  $\text{Re}$  e  $r/D$ , si può utilizzare l'abaco di Moody, oppure le seguenti formule:

- **regime laminare**  $\text{Re} < 2000$ :

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}};$$

- **regime turbolento**  $\text{Re} > 4000$ : **formula di Colebrook-White**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{r}{3.71D} \right).$$

In particolare,

- \* tubi lisci ( $r = 0$ ):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right);$$

- \* moto assolutamente turbolento:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{r}{3.71D} \right).$$



### Metodo iterativo per il calcolo dell'indice di resistenza con la formula di Colebrook-White

La formula di Colebrook-White è un'equazione implicita, quindi, per determinare  $\lambda$ , è necessario procedere con un ciclo di iterazioni a partire da un valore di primo tentativo. Ad ogni step di calcolo  $k + 1$ , si calcola il valore attuale  $\lambda_{(k+1)}$ , utilizzando il valore ottenuto allo step precedente del ciclo. Se il tubo non è liscio, si itera la formula

$$\lambda_{(k+1)} = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda_{(k)}}} + \frac{r}{3.71D} \right) \right]^{-2},$$

e il ciclo si arresta quando  $|\lambda_{(k+1)} - \lambda_{(k)}|$  è minore di una certa tolleranza fissata. Come valore di primo tentativo si può usare quello del regime assolutamente turbolento, per cui

$$\lambda_{(0)} = \lambda_{\infty} = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{r}{3.71D} \right) \right]^{-2}.$$

Se il tubo è liscio ( $r = 0$ ), la formula da iterare è

$$\lambda_{(k+1)} = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda_{(k)}}} \right) \right]^{-2}.$$

e non è possibile scegliere  $\lambda_{\infty}$  come valore iniziale, dato che la condizione di moto assolutamente turbolento non esiste nel caso di tubi lisci.

### Esempio

Si consideri il sistema di Fig. 19, in cui due serbatoi sono collegati da una condotta, con imbocco ben raccordato, di lunghezza  $L$ , diametro  $D$  e scabrezza  $r$ .

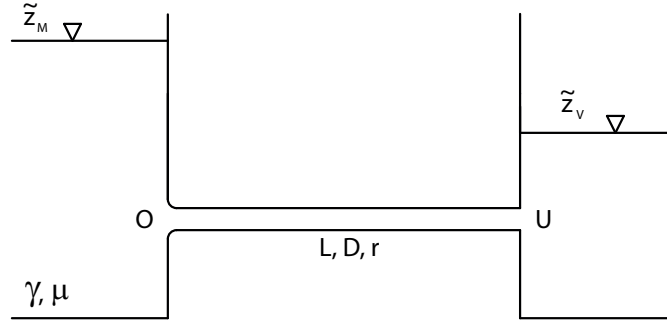


Figura 19:

Scriviamo l'equazione dell'energia meccanica tra la sezione di ingresso ( $O$ ) e quella di uscita ( $U$ ) della condotta:

$$H_{m,U} = H_{m,O} - JL$$

Il carico totale della prima sezione di condotta coincide con la quota geodetica del pelo libero del serbatoio di monte:

$$H_{m,O} = \tilde{z}_M.$$

In corrispondenza della sezione di uscita si ha:

$$H_{m,U} = \tilde{z}_U + \frac{p_U}{\gamma} + \alpha \frac{V_U^2}{2g}.$$

La quota piezometrica nella sezione di uscita è uguale a quella del serbatoio di valle,

$$\tilde{z}_U + \frac{p_U}{\gamma} = \tilde{z}_V.$$

Il diametro della condotta è costante, per cui la velocità media è costante. Allora, l'equazione dell'energia diventa

$$\tilde{z}_M - \tilde{z}_V = \alpha \frac{V^2}{2g} + JL.$$

La linea dei carichi totali si traccia a partire da monte, dove la condizione al contorno è l'energia potenziale del serbatoio,  $\tilde{z}_M$ ; è inclinata nel verso del moto con pendenza  $J$  e, in corrispondenza della sezione di uscita dista  $\alpha \frac{V^2}{2g}$

dalla quota piezometrica di valle.

La piezometrica si mantiene a distanza costante, pari all'altezza cinetica  $\alpha \frac{V^2}{2g}$ , dalla linea dei carichi totali. La condizione al contorno per il tracciamento della linea piezometrica è la quota piezometrica del serbatoio di valle. In corrispondenza dell'imbocco la corrente non è gradualmente variata, per cui la piezometrica si tratteggia fino a raccordarsi con l'energia a monte. In Fig. 20 sono tracciate in rosso la linea dei carichi totali e in blu la piezometrica.

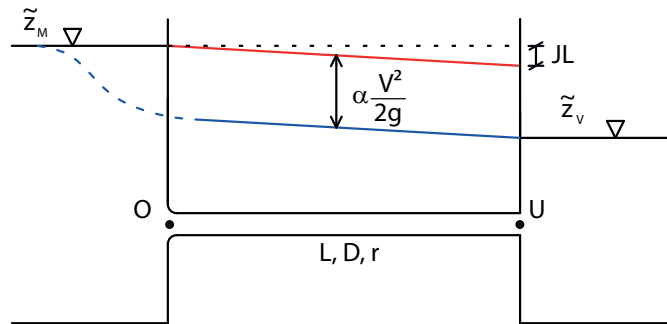


Figura 20:

L'equazione di bilancio energetico tra monte e valle si scrive:

$$\tilde{z}_M - \tilde{z}_v = \alpha \frac{V^2}{2g} + JL, \quad (1)$$

dove

$$J = \lambda \frac{V^2}{2gD}, \quad (2)$$

$$\lambda = \lambda \left( \text{Re}, \frac{r}{D} \right), \quad (3)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (4)$$

e

$$Q = VA = V \frac{\pi D^2}{4}. \quad (5)$$

### Caso A: problema di progetto

Data la portata, viene chiesto di determinare il dislivello tra il serbatoio di monte e quello di valle,  $\tilde{z}_M - \tilde{z}_V$ .

In questo caso il problema è di tipo esplicito, ovvero è possibile determinare direttamente l'incognita utilizzando le equazioni scritte sopra:

1. noto  $Q$ , dalla (5) si ricava  $V = \frac{4Q}{\pi D^2}$ ;
2. dalla (4) si ricava il valore del numero di Reynolds;
3. utilizzando l'abaco di Moody oppure la formula di Colebrook-White si ottiene l'indice di resistenza (3);
4. noti  $\lambda$  e  $V$ , dalla (2) si determina la cadente;
5. l'equazione dell'energia (1) può essere risolta esplicitamente, e fornisce l'incognita  $\tilde{z}_M - \tilde{z}_V$ .

### Caso B: problema di verifica

Dato il dislivello tra monte e valle,  $\tilde{z}_M - \tilde{z}_V$ , si deve calcolare la portata  $Q$  circolante nella condotta.

Questa volta il problema è implicito e si deve procedere iterativamente per calcolare l'incognita. Infatti, scriviamo esplicitamente la portata nell'equazione dell'energia (1), utilizzando la (2) e la (5):

$$\begin{aligned}\tilde{z}_M - \tilde{z}_V &= \alpha \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{V^2 L}{2gD} \\ &= \left( \alpha + \lambda \frac{L}{D} \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4}.\end{aligned}$$

Non è possibile determinare  $Q$  poiché l'indice di resistenza dipende dal numero di Reynolds, di conseguenza da  $V$  e quindi dalla portata stessa.

Metodo iterativo:

si ipotizza una portata di primo tentativo  $Q^{(0)}$ . Nota la portata al passo  $n$ , si procede nel modo seguente:

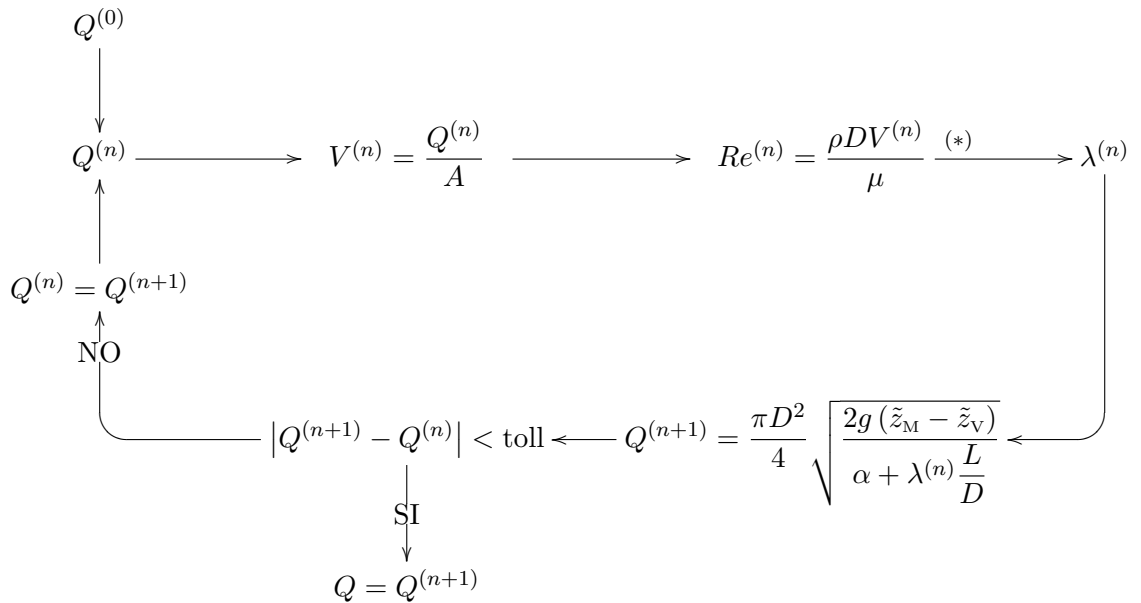
1. calcolo della velocità  $V^{(n)}$  dalla (5) nota la  $Q^{(n)}$ ;

2. calcolo del numero di Reynolds  $Re^{(n)}$  dalla (4);
3. stima dell'indice di resistenza  $\lambda^{(n)}$  dall'abaco di Moody o dalla formula di Colebrook-White (3);
4. determinazione di  $Q^{(n+1)}$  dall'equazione

$$Q^{(n+1)} = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g(\tilde{z}_M - \tilde{z}_V)}{\alpha + \lambda^{(n)} \frac{L}{D}}}.$$

La convergenza si considera soddisfatta quando  $|Q^{(n+1)} - Q^{(n)}|$  è minore di una certa tolleranza fissata.

Il processo iterativo precedente può essere rappresentato con il seguente schema



(\*) L'indice di resistenza  $\lambda^{(n)}$ , ad ogni iterazione  $(n)$ , può essere calcolato utilizzando l'abaco di Moody o risolvendo l'equazione (implicita) di Colebrook-White.

Si può scegliere come portata di primo tentativo quella associata all'ipotesi di regime di moto assolutamente turbolento. In questo caso l'indice di resistenza, che chiamiamo  $\lambda_\infty$ , non dipende da  $Re$  e si calcola con la seguente

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_\infty}} = -2 \log_{10} \left( \frac{r}{3.71D} \right),$$

per cui

$$\lambda_\infty = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{r}{3.71D} \right) \right]^{-2}$$

e

$$Q^{(0)} = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g(\tilde{z}_M - \tilde{z}_V)}{\alpha + \lambda_\infty \frac{L}{D}}}.$$

In alternativa si può calcolare  $Q^{(0)}$  risolvendo il problema nell'ipotesi di fluido ideale, quindi trascurando le perdite ( $\lambda^{(0)} = 0$ ). In questo caso

$$Q^{(0)} = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2g(\tilde{z}_M - \tilde{z}_V)}.$$

## 2.1.2 Perdite di carico concentrate

### Brusco allargamento

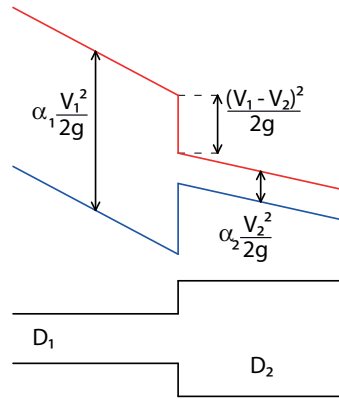


Figura 21: Brusco allargamento.

La condotta passa da un diametro  $D_1$  ad un diametro  $D_2$  maggiore, per cui la corrente decelera e passa dalla velocità  $V_1 = Q/A_1$  alla velocità  $V_2 = Q/A_2$ . La perdita si calcola con la **formula di Borda**,

$$\Delta H_m = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}.$$

La linea dei carichi totali ha pendenza  $J_1$  nel tratto di diametro  $D_1$ , poi subisce un salto verticale verso il basso in corrispondenza del brusco allargamento, per avere poi pendenza  $J_2$  nel tratto di diametro  $D_2$ . Per la formula di Darcy-Weissbach, la cadente si calcola come

$$J = \frac{8\lambda Q^2}{\pi^2 g D^5}$$

per cui  $J_1 > J_2$ , cioè la linea di sinistra è più inclinata di quella di destra. La piezometrica è una linea parallela alla linea dei carichi totali nei tratti di corrente gradualmente variata, e dista  $\alpha_1 V_1^2 / 2g$  da questa nel tratto di diametro  $D_1$ ,  $\alpha_2 V_2^2 / 2g$  nel tratto di diametro  $D_2$ . In corrispondenza del brusco allargamento si disegna un tratto verticale, come mostrato in Fig. 21. Si può dimostrare che la piezometrica si avvicina alla linea dei carichi totali andando valle.

### Imbocco a spigolo vivo

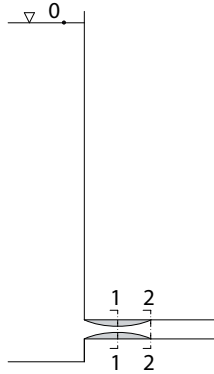


Figura 22: Imbocco a spigolo vivo.

La perdita di carico concentrata per imbocco a spigolo vivo si calcola come

$$\Delta H_m = 0.5 \frac{V^2}{2g}.$$

#### Dimostrazione:

A causa dell'inerzia delle particelle di fluido, a valle dell'imbocco si crea un restringimento della vena fluida. Dopo aver raggiunto la sezione minima, detta sezione contratta, la corrente si allarga e ritorna ad occupare l'intera sezione della condotta (Fig. 22). Sia 1-1 la sezione contratta; allora la sua area si calcola come

$$A_c = C_c A = C_c \pi \frac{D^2}{4}$$

dove  $C_c$  è il coefficiente di contrazione e vale 0.61.

Tra l'imbocco e la sezione contratta, la vena fluida si restringe, per cui la corrente accelera. In corrispondenza della sezione 1-1 la velocità è massima e la chiamiamo  $V_1$ .

Sia 2-2 la sezione ove la corrente si è riattaccata e occupa l'intera sezione del tubo. Da qui in poi la velocità della corrente è costante e pari a

$$V_2 = V = \frac{Q}{A}.$$

Tra la sezione contratta e la sezione 2-2, la vena fluida si allarga pertanto la corrente decelera fino al valore  $V$ . La velocità nella sezione contratta può essere calcolata come

$$V_1 = \frac{Q}{A_c} = \frac{Q}{C_c A} = \frac{V}{C_c}.$$



Calcoliamo la perdita  $\Delta H_m$  come la somma di due contributi, il primo relativo alla zona di accelerazione tra l'imbocco e la sezione contratta, il secondo alla zona di decelerazione tra la sezione contratta e la sezione 2-2:

$$\Delta H_m = \Delta H_{m,01} + \Delta H_{m,12},$$

quindi valutiamo separatamente i due contributi.

- $\Delta H_{m,12}$ : l'espansione della vena viene trattata come un brusco allargamento, pertanto si usa la formula di Borda:

$$\begin{aligned} \Delta H_{m,12} &= \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \\ &= \left( \frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{V^2}{2g} \\ &= \left( \frac{1}{0.61} - 1 \right)^2 \frac{V^2}{2g} \\ &\cong 0.4 \frac{V^2}{2g}. \end{aligned}$$

- $\Delta H_{m,01}$ : il restringimento della vena viene trattato facendo riferimento all'efflusso da parete verticale. Nell'efflusso, per fluido ideale, si calcola la velocità di uscita come  $V_{id} = \sqrt{2gh}$ ; in questo caso, essendo il fluido reale, la velocità nell'ultima sezione (1-1) è

$$V_1 = C_v V_{id},$$

dove  $C_v$  è il coefficiente di perdita e vale circa  $0.97 \div 0.98$ .

La perdita concentrata si calcola come differenza tra l'altezza cinetica che si avrebbe se il fluido fosse ideale, e quella invece che si ha con fluido reale:

$$\begin{aligned} \Delta H_{m,01} &= \frac{V_{id}^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \\ &= \left( \frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \frac{V_{id}^2}{2g} \\ &= \left( \frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \frac{1}{C_c^2} \frac{V^2}{2g} \\ &= \left( \frac{1}{0.98^2} - 1 \right) \frac{1}{0.61^2} \frac{V^2}{2g} \\ &\cong 0.1 \frac{V^2}{2g}. \end{aligned}$$

Allora,

$$\Delta H_m = \Delta H_{m,01} + \Delta H_{m,12} = 0.5 \frac{V^2}{2g}.$$

Si osservi che la perdita nel tratto ove la corrente accelera è molto minore (4 volte) di quella ove la corrente decelera. Per questo motivo molto spesso in corrispondenza di restringimenti di sezione la perdita di carico concentrata viene trascurata.

In Fig. 23(a) sono rappresentati gli andamenti della linea dei carichi totali (in rosso) e della piezometrica (in blu).

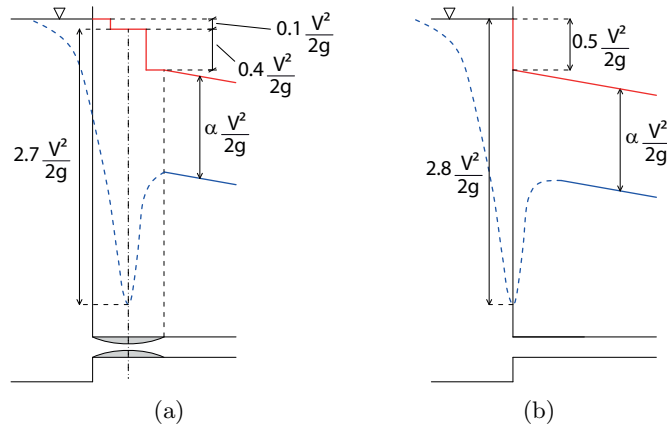


Figura 23: (a) Linea dei carichi totali e piezometrica in corrispondenza dell'imbocco a spigolo vivo. (b) Rappresentazione semplificata della linea dei carichi totali e della piezometrica in corrispondenza dell'imbocco a spigolo vivo.

La piezometrica, in corrispondenza della sezione contratta, forma un uncino, detto appunto uncino piezometrico. La linea piezometrica è tratteggiata perché la corrente non è gradualmente variata (tranne che nella sezione contratta).

Come è noto, la distanza tra la piezometrica e la linea dei carichi totali è pari all'altezza cinetica. Se seguiamo una particella di fluido che parte da un generico punto 0 sul pelo libero del serbatoio, questa inizierà a muoversi, e quindi ad aumentare la sua velocità, fino a raggiungere l'imbocco della condotta; quindi continuerà ad accelerare nel tratto di condotta ove la corrente si restringe, poi dalla sezione 1-1 in poi inizierà a decelerare fino a raggiungere la velocità  $V$  costante. Allora la piezometrica scende verso il basso fino a che la particella accelera, raggiunge un minimo in corrispondenza della sezione contratta 1-1, poi inizia a riavvicinarsi alla linea dei carichi totali. In corrispondenza della sezione 2-2 la corrente diventa gradualmente variata, per cui, a valle, la piezometrica diventa parallela alla linea dei carichi totali distante da essa  $\alpha \frac{V^2}{2g}$ .

La distanza massima tra piezometrica e linea dei carichi totali si ha in corrispondenza della sezione contratta ed è pari a

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{1}{C_c^2} \frac{V^2}{2g} \cong 2.7 \frac{V^2}{2g}.$$

Pertanto, con riferimento alla Fig. 23(a), la distanza tra la quota piezometrica della sezione contratta e il piano dei carichi idrostatici del serbatoio è pari a circa

$$0.1 \frac{V^2}{2g} + 2.7 \frac{V^2}{2g} = 2.8 \frac{V^2}{2g}.$$

Per semplicità, la perdita di carico  $\Delta H_m = 0.5 \frac{V^2}{2g}$  si rappresenta con un brusco abbassamento della linea dei carichi totali concentrato in corrispondenza dell'imbocco. Anche l'uncino piezometrico viene disegnato in corrispondenza della sezione d'imbocco. La rappresentazione semplificata della perdita di carico concentrata dovuta all'imbocco a spigolo vivo è rappresentata in Fig. 23(b).

### Imbocco con tubo addizionale interno

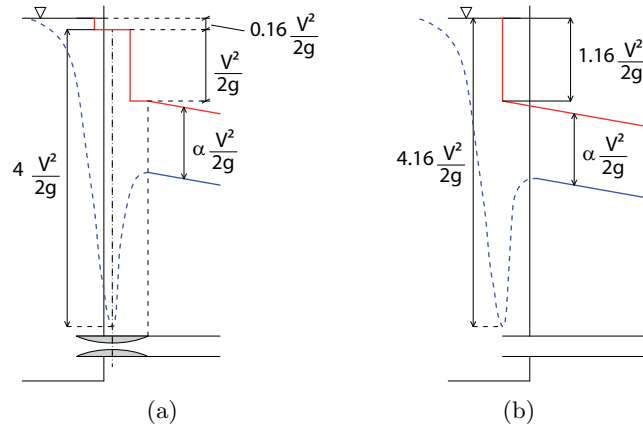


Figura 24: (a) Imbocco con tubo addizionale interno. (b) Rappresentazione semplificata della linea dei carichi totali e della piezometrica in corrispondenza dell'imbocco con tubo addizionale interno.

La perdita di carico concentrata per imbocco con tubo addizionale interno si calcola come

$$\Delta H_m = 1.16 \frac{V^2}{2g}.$$

La dimostrazione è identica al caso di imbocco a spigolo vivo, con la differenza che il coefficiente di contrazione è minore:  $C_c = 0.5$ .

La piezometrica forma anche in questo caso l'uncino piezometrico, come mostrato in Fig. 24(a); ripetendo i calcoli con il valore di  $C_c$  menzionato, si ottiene che, in corrispondenza del minimo, linea dei carichi totali e piezometrica distano  $4 \frac{V^2}{2g}$ .

Anche in questo caso, il disegno viene semplificato rappresentando la perdita di carico  $\Delta H_m$  con un brusco abbassamento della linea dei carichi totali in corrispondenza dell'imbocco della condotta. Anche l'uncino piezometrico si disegna in corrispondenza dell'imbocco (Fig. 24(b)).

## Brusco restringimento

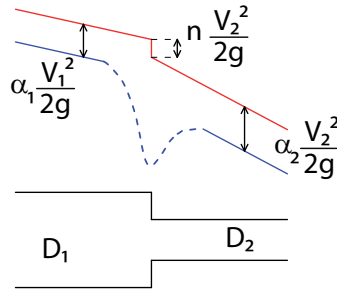


Figura 25: Brusco restringimento.

La condotta passa da un diametro  $D_1$  ad un diametro  $D_2$  minore, per cui la corrente accelera. La perdita concentrata si valuta come

$$\Delta H_m = n \frac{V_2^2}{2g},$$

dove  $n = f\left(\frac{D_1}{D_2}\right)$  è un coefficiente che dipende dal rapporto tra i due diametri, in particolare,  $n = 0$  se  $\frac{D_1}{D_2} = 1$  e  $n = 0.5$  se  $\frac{D_1}{D_2} \rightarrow \infty$ . Si osservi che la perdita di carico è proporzionale all'altezza cinetica di valle.

In Fig. 25 sono rappresentati gli andamenti della linee dei carichi totale e piezometrica; quest'ultima presenta un uncino piezometrico, poiché, anche in questo caso, a valle del restringimento, la vena si contrae. L'uncino è meno pronunciato di quello che si ha nel caso di imbocco a spigolo vivo perché il coefficiente di contrazione è maggiore di 0.6.

### Convergente

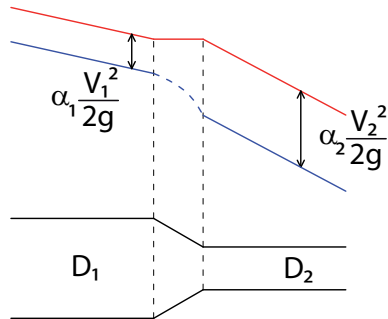


Figura 26: Convergente.

Poiché la corrente accelera gradualmente, si trascurano le perdite, quindi

$$\Delta H_m = 0.$$

La linea dei carichi totali si disegna con un tratto orizzontale per tutta la lunghezza del convergente. La piezometrica si tratteggia perché la corrente non è gradualmente variata.

### Divergente

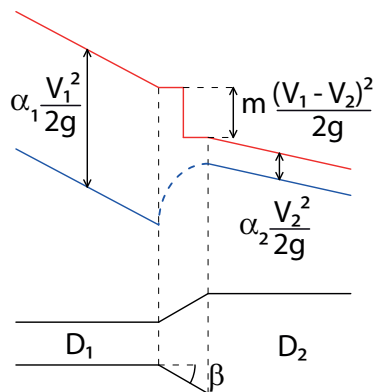


Figura 27: Divergente.

La perdita di carico si calcola come

$$\Delta H_m = m \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

dove  $m = f(\beta)$  è un coefficiente che dipende dall'angolo  $\beta$  che le generatrici della superficie laterale del divergente formano con l'orizzontale. In particolare,  $m = 0$  se  $\beta = 0$  e  $m = 1$  se  $\beta = 90^\circ$ .  $m$  non varia linearmente tra 0

e 1 poiché in realtà la perdita  $\Delta H_m$  è data dalla somma di due contributi: perdita concentrata e perdita distribuita lungo la lunghezza del divergente. Al crescere di  $\beta$  la perdita concentrata aumenta mentre la lunghezza del raccordo diminuisce, per cui la perdita distribuita diminuisce. Ne risulta un massimo per  $m$  in corrispondenza di  $\beta \cong 65^\circ$ .

La perdita di carico si disegna come illustrato in Fig. 27, cioè con un salto verticale verso il basso a metà del divergente. La piezometrica invece con un raccordo tratteggiato tra i due tratti ove la corrente è gradualmente variata.

## 2.2 Esercizi

### 2.2.1 Esercizio 1

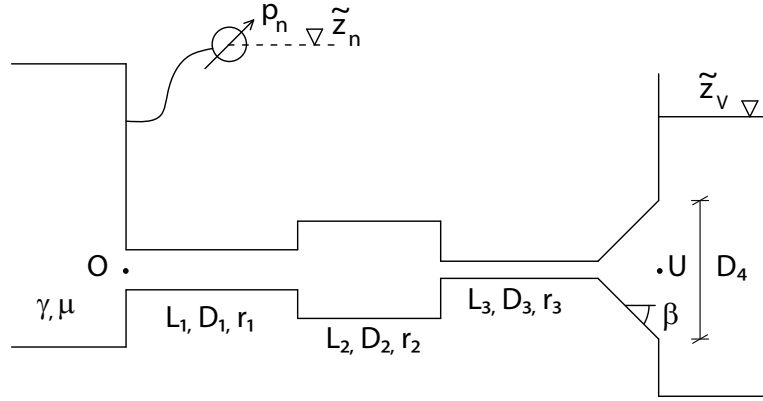


Figura 28: Esercizio 1.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 28, in cui scorre in condizioni di moto permanente un fluido con peso specifico  $\gamma$  e viscosità  $\mu$ . Il serbatoio di monte è in pressione e collegato ad un manometro metallico, quello di valle è a pelo libero.

Sono noti: la quota geodetica  $\tilde{z}_v$  del pelo libero del serbatoio di valle, la pressione  $p_n > 0$  del manometro metallico e la quota geodetica del suo baricentro  $\tilde{z}_n$ ; la geometria del sistema e le proprietà del fluido.

- Determinare la portata circolante  $Q$ ;
- tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.

#### Svolgimento:

Poiché  $\tilde{z}_n + p_n/\gamma > \tilde{z}_v$ , e dato che il carico totale medio può solo diminuire lungo il percorso, la corrente scorre da sinistra verso destra. Scriviamo l'equazione dell'energia per il sistema tra la sezione di ingresso e quella di uscita della tubazione:

$$\begin{aligned}
 H_{m,U} = H_{m,O} & - \underbrace{0.5 \frac{V_1^2}{2g}}_{\text{imbocco a spigolo vivo}} - \underbrace{\frac{J_1 L_1}{\text{perdita distr. su } L_1}} - \underbrace{\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}}_{\text{brusco allargamento}} \\
 & - \underbrace{\frac{J_2 L_2}{\text{perdita distr. su } L_2}} - \underbrace{\frac{n \frac{V_3^2}{2g}}{\text{brusco restring.}} - \underbrace{\frac{J_3 L_3}{\text{perdita distr. su } L_3}} - \underbrace{\frac{m (V_3 - V_4)^2}{2g}}_{\text{divergente}}
 \end{aligned}$$



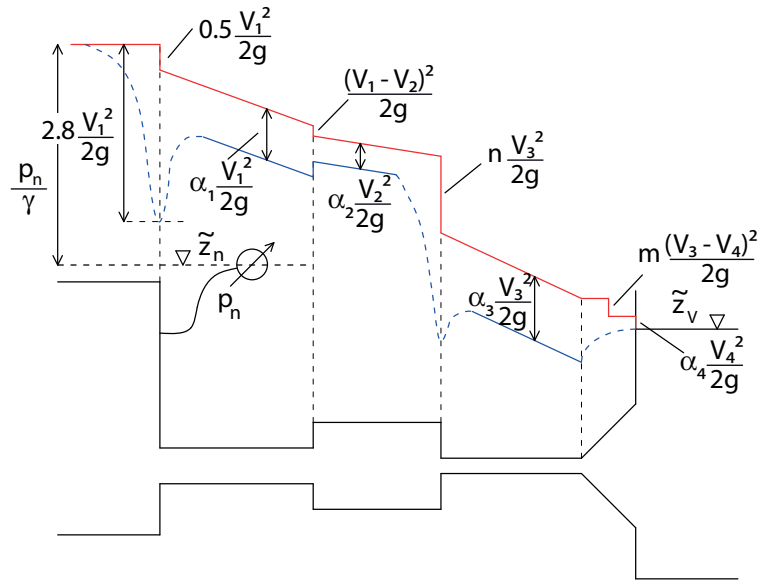


Figura 29: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 1.

Il carico della prima sezione corrisponde alla quota piezometrica del serbatoio di monte, calcolata tramite il manometro metallico:

$$H_{m,o} = \tilde{z}_o + \frac{p_o}{\gamma} + \alpha_o \frac{V_o^2}{2g} = \tilde{z}_n + \frac{p_n}{\gamma}.$$

La quota piezometrica nella sezione di uscita è uguale a quella del serbatoio di valle:

$$H_{m,u} = \tilde{z}_u + \frac{p_u}{\gamma} + \alpha_4 \frac{V_4^2}{2g} = \tilde{z}_v + \alpha_4 \frac{V_4^2}{2g}.$$

L'equazione dell'energia diventa, dunque,

$$\begin{aligned} \tilde{z}_n - \tilde{z}_v + \frac{p_n}{\gamma} &= 0.5 \frac{V_1^2}{2g} + J_1 L_1 + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + J_2 L_2 + n \frac{V_3^2}{2g} + J_3 L_3 \\ &+ m \frac{(V_3 - V_4)^2}{2g} + \alpha_4 \frac{V_4^2}{2g}; \end{aligned}$$

sostituendo le espressioni delle cadenti ed esplicitando la portata

$$\begin{aligned} \tilde{z}_n - \tilde{z}_v + \frac{p_n}{\gamma} &= \frac{Q^2}{2g} \left[ \frac{0.5}{A_1^2} + \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 + \frac{n}{A_3^2} + m \left( \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_4} \right)^2 + \frac{\alpha_4}{A_4^2} \right] \\ &+ \frac{\lambda_1 L_1 Q^2}{2g D_1 A_1^2} + \frac{\lambda_2 L_2 Q^2}{2g D_2 A_2^2} + \frac{\lambda_3 L_3 Q^2}{2g D_3 A_3^2}. \end{aligned}$$

Il problema è implicito poiché gli indici di resistenza dipendono dalla portata, quindi si deve procedere iterativamente. Gli step sono gli stessi già illustrati nell'esempio al paragrafo precedente.

Si ipotizza una portata di primo tentativo  $Q^{(0)}$ , poi si itera nel seguente modo:

1. calcolo delle velocità  $V_j^{(n)}$  nei vari tratti della condotta

$$V_j^{(n)} = \frac{4Q^{(n)}}{\pi D_j^2} \text{ per } j = 1, 2, 3, 4;$$

2. calcolo dei numeri di Reynolds  $Re_j^{(n)}$

$$Re_j^{(n)} = \frac{\rho V_j^{(n)} D_j}{\mu} \text{ per } j = 1, 2, 3;$$

3. stima degli indici di resistenza  $\lambda_j^{(n)}$  per  $j = 1, 2, 3$  dall'abaco di Moody o dalla formula di Colebrook-White;

4. determinazione di  $Q^{(n+1)}$  dall'equazione dell'energia:

$$Q^{(n+1)} = \sqrt{\frac{2g \left( \tilde{z}_n - \tilde{z}_v + \frac{p_n}{\gamma} \right)}{K + \frac{\lambda_1^{(n)} L_1}{D_1 A_1^2} + \frac{\lambda_2^{(n)} L_2}{D_2 A_2^2} + \frac{\lambda_3^{(n)} L_3}{D_3 A_3^2}},$$

dove

$$K = \frac{0.5}{A_1^2} + \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 + \frac{n}{A_3^2} + m \left( \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_4} \right)^2 + \frac{\alpha_4}{A_4^2}$$

è un coefficiente dovuto alle perdite concentrate e all'altezza cinetica residua allo sbocco.

La convergenza si considera soddisfatta quando  $|Q^{(n+1)} - Q^{(n)}|$  è minore di una certa tolleranza fissata.

Si può calcolare  $Q^{(0)}$  risolvendo il problema nell'ipotesi di fluido ideale, quindi trascurando tutte le perdite, distribuite e concentrate. In questo caso

$$Q^{(0)} = A_4 \sqrt{2g \left( \tilde{z}_n - \tilde{z}_v + \frac{p_n}{\gamma} \right)}.$$

In alternativa si può fare un'ipotesi sui regimi di moto, e considerare, in tutti i tratti di condotta, il moto assolutamente turbolento. Allora,

$$Q^{(0)} = \sqrt{\frac{2g \left( \tilde{z}_M - \tilde{z}_n + \frac{p_n}{\gamma} \right)}{K + \frac{\lambda_{1,\infty} L_1}{D_1 A_1^2} + \frac{\lambda_{2,\infty} L_2}{D_2 A_2^2} + \frac{\lambda_{3,\infty} L_3}{D_3 A_3^2}},$$

dove

$$\lambda_{j,\infty} = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{r_j}{3.71 D_j} \right) \right]^{-2} \quad \text{per } j = 1, 2, 3.$$

In Fig. 29 sono illustrati gli andamenti della linea dei carichi totali, in rosso, e della piezometrica, in blu, per l'esercizio 1.

## 2.2.2 Esercizio 2

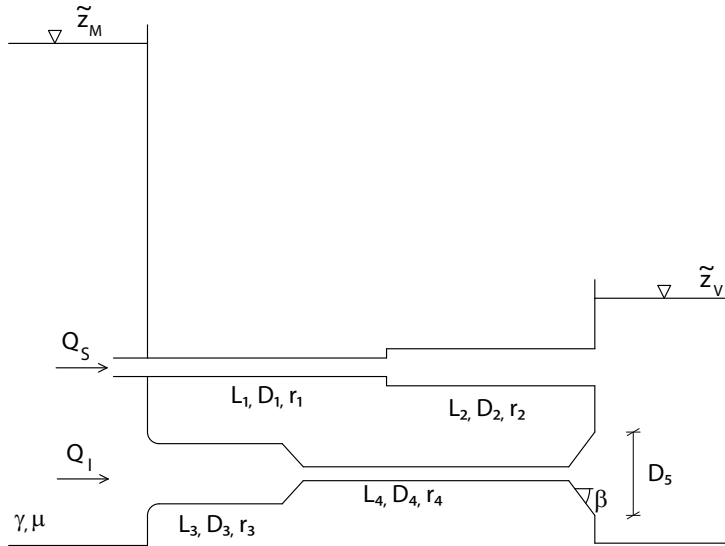


Figura 30: Esercizio 2.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 30. La portata che scorre nella condotta superiore,  $Q_S$ , e quella nella condotta inferiore,  $Q_I$ , non si influenzano essendo i due serbatoi indefiniti.

Sono noti: la geometria del sistema (ma non le quote geodetiche dei peli liberi dei serbatoi), le proprietà del fluido e la portata circolante nella condotta superiore  $Q_S$ , che scorre da sinistra verso destra.

- Determinare la portata circolante nella condotta inferiore  $Q_I$ ;
- tracciare le linee dei carichi totali e piezometriche.

### Svolgimento:

Equazione dell'energia per la condotta superiore:

$$\tilde{z}_M = 1.16 \frac{V_1^2}{2g} + J_1 L_1 + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + J_2 L_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \tilde{z}_V.$$

Le perdite di carico, da monte a valle, sono dovute a: imbocco con tubo addizionale interno, perdita distribuita sul tratto  $L_1$ , brusco allargamento, perdita distribuita sul tratto  $L_2$ . Poiché nella condotta superiore  $Q_S$  scorre da sinistra verso destra, deve risultare  $\tilde{z}_M > \tilde{z}_V$ , e di conseguenza anche nella condotta inferiore  $Q_I$  scorre da sinistra verso destra.

Condotta inferiore:

$$\tilde{z}_M = J_3 L_3 + J_4 L_4 + m \frac{(V_4 - V_5)^2}{2g} + \alpha_5 \frac{V_5^2}{2g} + \tilde{z}_V.$$

Le perdite di carico, da monte a valle, sono dovute a: perdita distribuita sul tratto  $L_3$ , perdita distribuita sul tratto  $L_4$ , divergente. L'imbocco ben raccordato e il convergente non causano perdite.

Inoltre,

$$V_j = \begin{cases} \frac{Q_s}{A_j} & j = 1, 2 \\ \frac{Q_1}{A_j} & j = 3, 4, 5. \end{cases}$$

In Fig. 31 sono rappresentate le linee dei carichi totali e le piezometriche del sistema.

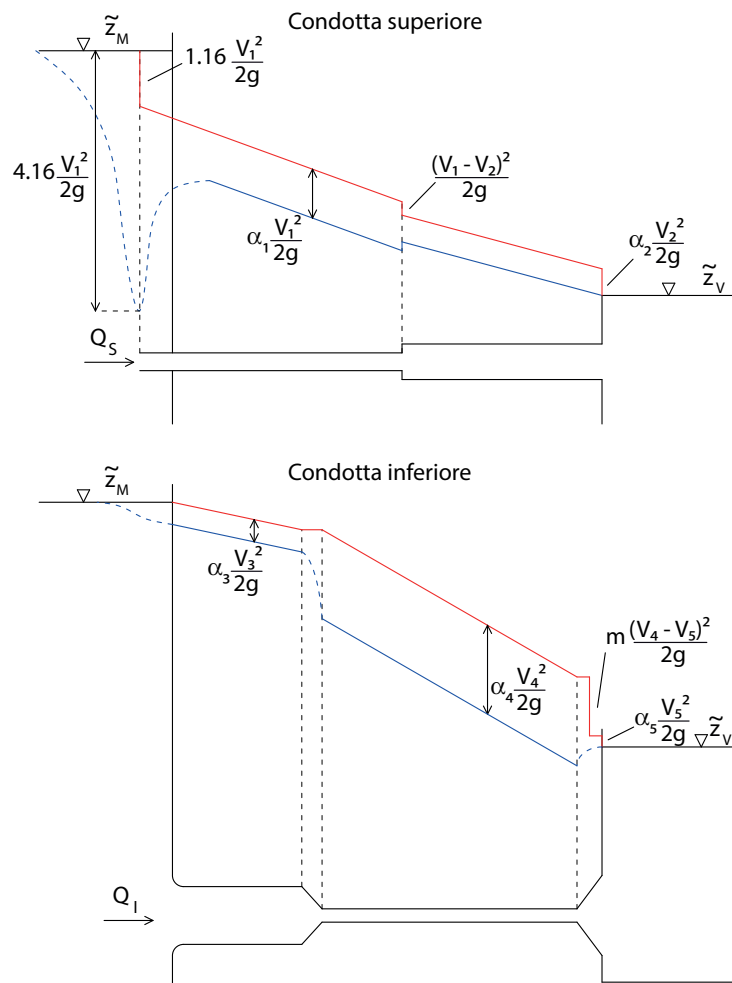


Figura 31: Linee dei carichi totali e piezometriche per l'esercizio 2.

Nella condotta superiore la portata  $Q_s$  è nota (problema di progetto), quindi:

- si calcolano le velocità  $V_1$  e  $V_2$ ;
- si ricavano i numeri di Reynolds  $Re_1$  e  $Re_2$ ;
- si trovano gli indici di resistenza  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dall'abaco di Moody o tramite la formula di Colebrook-White;
- con la formula di Darcy-Weissbach si determinano le cadenti  $J_1$  e  $J_2$ ;
- in maniera esplicita si ricava l'unica incognita, ovvero il dislivello tra il pelo libero dei due serbatoi:

$$\tilde{z}_M - \tilde{z}_V = \left[ \frac{1.16}{A_1^2} + \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 + \frac{\alpha_2}{A_2^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{D_1 A_1^2} + \frac{\lambda_2 L_2}{D_2 A_2^2} \right] \frac{Q_s^2}{2g}.$$

Nella condotta inferiore l'incognita è la portata  $Q_i$  (problema di verifica), pertanto il sistema è implicito. Si procede iterativamente come illustrato nell'esercizio precedente:

si ipotizza una portata inferiore di primo tentativo  $Q_i^{(0)}$ , poi si itera nel modo seguente:

1. calcolo delle velocità  $V_j^{(n)}$  nei vari tratti della condotta inferiore,

$$V_j^{(n)} = \frac{4Q_i^{(n)}}{\pi D_j^2} \text{ per } j = 3, 4, 5;$$

2. calcolo dei numeri di Reynolds  $Re_j^{(n)}$ ,

$$Re_j^{(n)} = \frac{\rho V_j^{(n)} D_j}{\mu} \text{ per } j = 3, 4;$$

3. stima degli indici di resistenza  $\lambda_j^{(n)}$  per  $j = 3, 4$  dall'abaco di Moody o dalla formula di Colebrook-White;

4. determinazione di  $Q_i^{(n+1)}$  dall'equazione dell'energia:

$$Q_i^{(n+1)} = \sqrt{\frac{2g(\tilde{z}_M - \tilde{z}_V)}{K + \frac{\lambda_3^{(n)} L_3}{D_3 A_3^2} + \frac{\lambda_4^{(n)} L_4}{D_4 A_4^2}}},$$

dove

$$K = m \left( \frac{1}{A_4} - \frac{1}{A_5} \right)^2 + \frac{\alpha_5}{A_5^2}.$$

La convergenza si considera soddisfatta quando  $|Q_i^{(n+1)} - Q_i^{(n)}|$  è minore di una certa tolleranza fissata.

### 2.2.3 Esercizio 3

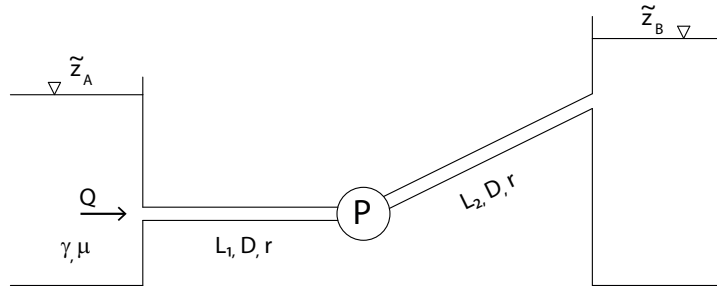


Figura 32: Esercizio 3.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 32. Nella condotta è stato inserito un impianto di sollevamento indicato con  $P$ . Sono noti: la geometria del sistema, le proprietà del fluido, la portata circolante  $Q$  (da sinistra verso destra), le quote geodetiche  $\tilde{z}_A$  e  $\tilde{z}_B$ , e il rendimento della pompa,  $\eta$ .

- Determinare la potenza assorbita dalla pompa  $P_A$ ;
- tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.

#### Svolgimento:

Un **impianto di sollevamento**, o pompa, fornisce energia meccanica al sistema tramite un incremento di carico  $\Delta H_P$  detto **prevalenza totale**. Il rendimento di una macchina è definito come il rapporto tra la potenza utile  $P_U$ , ovvero prodotta, e quella assorbita  $P_A$ :

$$\eta = \frac{P_U}{P_A}.$$

Per la pompa la potenza utile si calcola nel seguente modo

$$P_U = \gamma Q \Delta H_P,$$

per cui

$$P_A = \frac{\gamma Q \Delta H_P}{\eta}.$$

Equazione dell'energia tra monte e valle:

$$\tilde{z}_A - 0.5 \frac{V^2}{2g} - JL_1 + \Delta H_P - JL_2 = \tilde{z}_B + \alpha \frac{V^2}{2g}.$$

La portata è nota, per cui si può ricavare il numero di Reynolds e di conseguenza il valore dell'indice di resistenza. L'unica incognita è la prevalenza, che risulta, quindi,

$$\Delta H_P = \tilde{z}_B - \tilde{z}_A + 0.5 \frac{V^2}{2g} + J(L_1 + L_2) + \alpha \frac{V^2}{2g}.$$

Con la prevalenza si ricava la potenza assorbita dalla pompa.

In Fig. 33 sono rappresentate la linea dei carichi totali e la piezometrica.

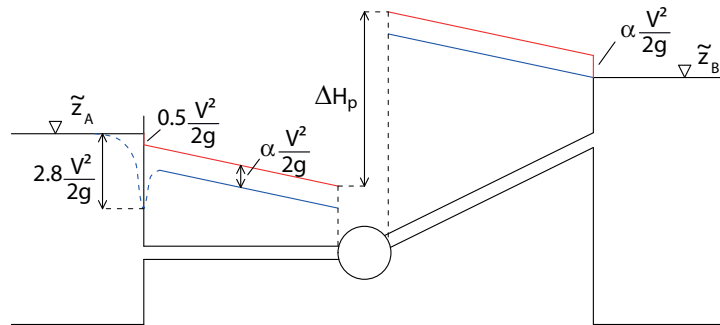


Figura 33: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 3.



### 2.2.4 Esercizio 4

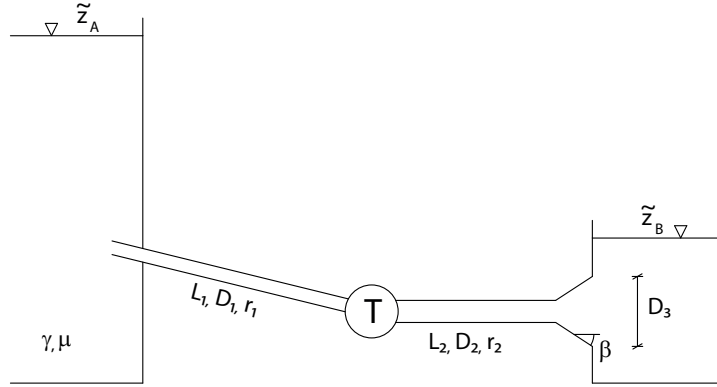


Figura 34: Esercizio 4.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 34. Nella condotta è stata inserita una turbina, indicata con  $T$ .

Sono noti: la geometria del sistema, le proprietà del fluido, la portata circolante  $Q$ , le quote geodetiche  $\tilde{z}_A$  e  $\tilde{z}_B$  ( $\tilde{z}_A > \tilde{z}_B$ ), e il rendimento della turbina,  $\eta$ .

- Determinare la potenza utile prodotta dalla turbina  $P_U$ ;
- tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.

#### Svolgimento:

La corrente cede parte dell'energia meccanica alla **turbina**, tramite una perdita di carico  $\Delta H_T$  detta **salto utile**.

Per la turbina la potenza assorbita si calcola come

$$P_A = \gamma Q \Delta H_T$$

per cui

$$P_U = \eta \gamma Q \Delta H_T.$$

Poiché  $\tilde{z}_A > \tilde{z}_B$ , la corrente scorre da sinistra verso destra. Equazione dell'energia tra monte e valle:

$$\tilde{z}_A - 1.16 \frac{V_1^2}{2g} - J_1 L_1 - \Delta H_T - J_2 L_2 - m \frac{(V_2 - V_3)^2}{2g} = \tilde{z}_B + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g}.$$

La portata è nota, per cui si possono ricavare i numeri di Reynolds e di conseguenza i valori degli indici di resistenza. L'unica incognita è il salto utile, che risulta, quindi,

$$\Delta H_T = \tilde{z}_A - \tilde{z}_B - 1.16 \frac{V_1^2}{2g} - J_1 L_1 - J_2 L_2 - m \frac{(V_2 - V_3)^2}{2g} - \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g}.$$

Con questo si ricava la potenza generata dalla turbina.  
 In Fig. 35 sono rappresentate la linea dei carichi totali e la piezometrica.

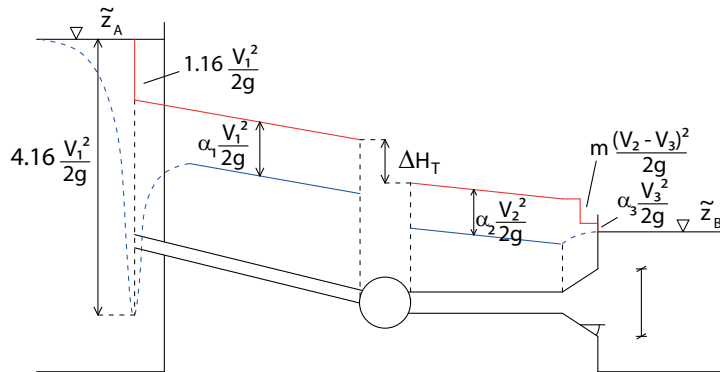


Figura 35: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 4.

**Nota:** quando nel sistema è presente una macchina idraulica, pompa o turbina, compare un'ulteriore incognita pertanto è necessario che venga fornito un dato in più. In questi due ultimi esercizi infatti erano noti sia la portata che il dislivello tra i due serbatoi.

### 2.2.5 Esercizio 5

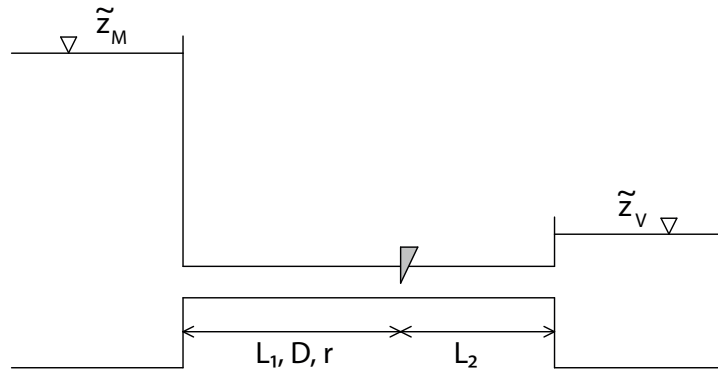


Figura 36: Esercizio 5.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 36. Nella condotta è stata inserita una saracinesca, che riduce la sezione di passaggio della corrente di un fattore  $k$ .

Sono noti: la geometria del sistema, le proprietà del fluido, il fattore  $k$  e la portata  $Q$ , che scorre da sinistra verso destra.

- Determinare il dislivello tra i peli liberi dei due serbatoi;
- tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.

#### Svolgimento:

La saracinesca riduce la sezione di passaggio da  $A$  a  $A_r = kA$ , dove  $0 < k < 1$  è il fattore di riduzione. A valle della saracinesca si forma una vena contratta, come illustrato in Fig. 37, che raggiunge una sezione minima pari a

$$A_c = C_c A_r = C_c k A.$$

La velocità massima della corrente, in corrispondenza di  $A_c$ , è quindi data da

$$V_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{1}{k C_c} V$$

dove  $V$  è la velocità a valle della saracinesca, ove l'intera sezione del tubo è occupata dal fluido.

La perdita di carico dovuta alla presenza della saracinesca si calcola applicando la formula di Borda nel tratto in cui la corrente decelera, cioè dove la vena si riallarga:

$$\begin{aligned} \Delta H_s &= \frac{(V_c - V)^2}{2g} \\ &= \left( \frac{1}{k C_c} - 1 \right)^2 \frac{V^2}{2g}. \end{aligned}$$

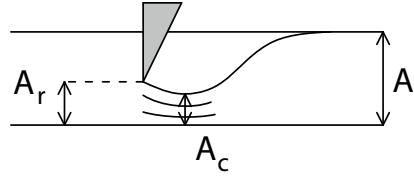


Figura 37: Saracinesca.

Il calcolo di  $\tilde{z}_M - \tilde{z}_V$  avviene in maniera esplicita visto che la portata è nota:

$$\tilde{z}_M - \tilde{z}_V = 0.5 \frac{V^2}{2g} + JL_1 + \left( \frac{1}{kC_c} - 1 \right)^2 \frac{V^2}{2g} + JL_2 + \alpha \frac{V^2}{2g}.$$

A causa della contrazione della vena, a valle della saracinesca si forma l'uncino piezometrico, come illustrato in Fig. 38.

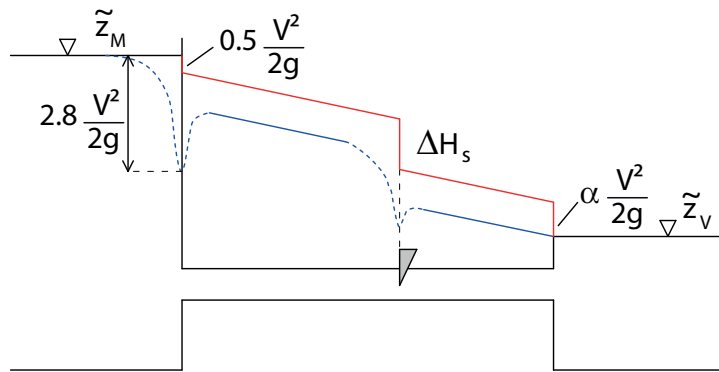


Figura 38: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 5.

### 2.2.6 Esercizio 6

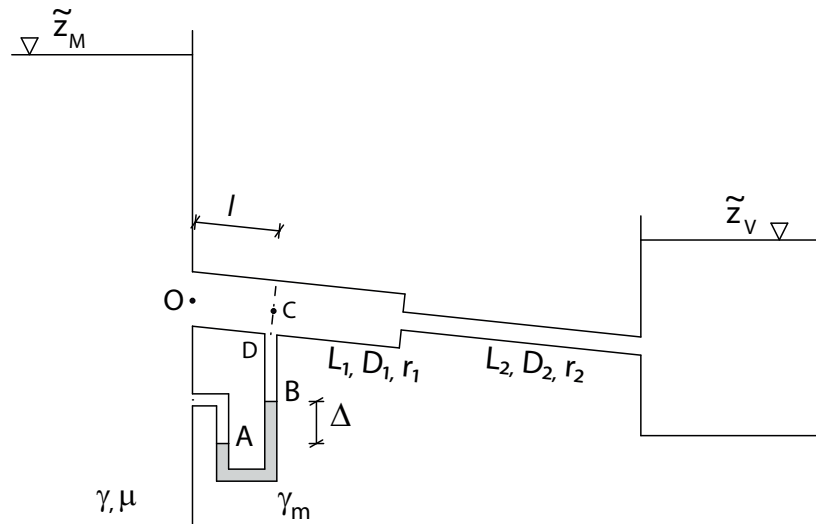


Figura 39: Esercizio 6.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 39. Nel sistema è stato inserito un manometro tra il serbatoio di monte e la condotta.

Sono noti: la geometria del sistema, le proprietà dei fluidi e la lettura del manometro  $\Delta$ .

- Determinare il dislivello tra i peli liberi dei due serbatoi;
- tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.

#### Svolgimento:

In questo esercizio sia il dislivello tra i peli liberi dei due serbatoi che la portata sono incogniti. Evidentemente il manometro fornisce l'informazione aggiuntiva necessaria a risolvere il problema.

Scriviamo l'equazione dell'energia tra il serbatoio di monte e la sezione  $C-C$ , in corrispondenza del ramo di destra del manometro. Il flusso subisce una perdita concentrata (imbocco a spigolo vivo) e una perdita distribuita sulla lunghezza  $l$ , per cui

$$\tilde{z}_C + \frac{p_C}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \tilde{z}_M - 0.5 \frac{V_1^2}{2g} - J_1 l.$$

Sostituendo l'espressione della cadente, si ottiene

$$(0.5 + \alpha_1) \frac{Q^2}{2gA_1} + \frac{\lambda_1 l Q^2}{2gD_1 A_1^2} = \tilde{z}_M - \left( \tilde{z}_C + \frac{p_C}{\gamma} \right),$$

in cui, oltre alla portata, anche il termine di destra dell'equazione è incognito. Utilizziamo le informazioni provenienti dal manometro. Nel manometro i fluidi sono fermi, quindi vale la legge di Stevino:

$$\begin{aligned} \text{tra } O \text{ e } A: \quad \tilde{z}_O + \frac{p_O}{\gamma} &= \tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma}; \\ \text{tra } D \text{ e } B: \quad \tilde{z}_D + \frac{p_D}{\gamma} &= \tilde{z}_B + \frac{p_B}{\gamma}; \\ \text{tra } A \text{ e } B: \quad p_B &= p_A - \Delta\gamma_m. \end{aligned}$$

Nel serbatoio il fluido è fermo, per cui

$$\tilde{z}_M = \tilde{z}_O + \frac{p_O}{\gamma}.$$

Inoltre, poiché la corrente è gradualmente variata, la quota piezometrica è costante sulle sezioni trasversali al flusso, quindi

$$\tilde{z}_C + \frac{p_C}{\gamma} = \tilde{z}_D + \frac{p_D}{\gamma}$$

In definitiva, si ricava

$$\begin{aligned} \tilde{z}_M - \left( \tilde{z}_C + \frac{p_C}{\gamma} \right) &= \left( \tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) \\ &= \Delta \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione dell'energia si ottiene un'equazione nell'unica incognita  $Q$ :

$$(0.5 + \alpha_1) \frac{Q^2}{2gA_1^2} + \frac{\lambda_1 l Q^2}{2gD_1 A_1^2} = \Delta \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma}.$$

L'equazione è implicita poiché l'indice di resistenza  $\lambda_1$  dipende dalla portata stessa, e può essere risolta con il classico metodo iterativo visto negli esercizi precedenti.

Quindi, la presenza del manometro ci ha permesso di determinare la portata  $Q$ . Per calcolare il dislivello tra i peli liberi dei due serbatoi basta risolvere l'equazione dell'energia tra il serbatoio di monte e la sezione di sbocco della tubazione:

$$\tilde{z}_M - \tilde{z}_V = 0.5 \frac{V_1^2}{2g} + J_1 L_1 + n \frac{V_2^2}{2g} + J_2 L_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}.$$

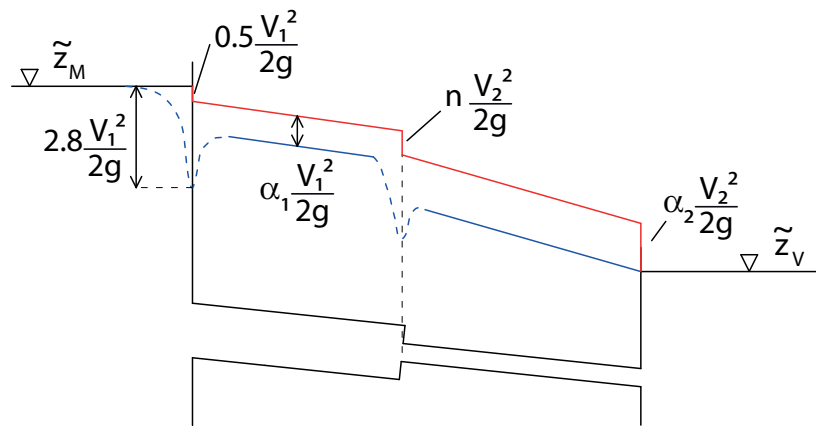


Figura 40: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 6.

### 2.2.7 Esercizio 7

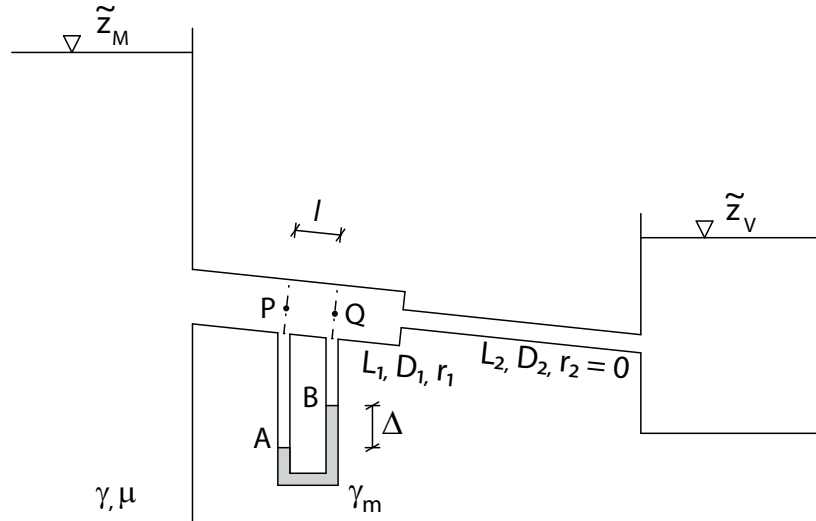


Figura 41: Esercizio 7.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 41. Nel sistema è stato inserito un manometro differenziale nel primo tratto di condotta.

Sono noti: la geometria del sistema, le proprietà dei fluidi e la lettura del manometro  $\Delta$ .

- Determinare il dislivello tra i peli liberi dei due serbatoi;
- tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.

Nota: si consideri liscio il secondo tubo:  $r_2 = 0$ .

#### Svolgimento:

Per determinare il verso della portata consideriamo i baricentri delle sezioni in corrispondenza delle quali è applicato il manometro, punti  $P$  e  $Q$ , e cerchiamo di capire se  $H_{m,P} - H_{m,Q}$  è maggiore o minore di 0.

$$H_{m,P} - H_{m,Q} = \left( \tilde{z}_P + \frac{p_P}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left( \tilde{z}_Q + \frac{p_Q}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right)$$

dato che il fluido mantiene la stessa velocità  $V_1$  nelle due sezioni. Come nell'esercizio precedente, applicando la legge di Stevino tra i punti del manometro si ottiene

$$\left( \tilde{z}_P + \frac{p_P}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_Q + \frac{p_Q}{\gamma} \right) = \Delta \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} > 0$$



di conseguenza  $H_{m,P} > H_{m,Q}$  e la portata scorre da sinistra verso destra (cioè da  $P$  verso  $Q$ ).

Scriviamo l'equazione dell'energia tra  $P$  e  $Q$ :

$$\tilde{z}_Q + \frac{p_Q}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \tilde{z}_P + \frac{p_P}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - J_1 l$$

tra le due sezioni non ci sono perdite concentrate, né variazioni di diametro della condotta, quindi il fluido subisce solo la perdita distribuita sulla lunghezza  $l$ . Da questa formula si può esplicitare la cadente  $J_1$

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{l} \left[ \left( \tilde{z}_P + \frac{p_P}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_Q + \frac{p_Q}{\gamma} \right) \right] \\ &= \frac{(\gamma_m - \gamma) \Delta}{\gamma l}. \end{aligned}$$

In questo tipo particolare di problema, detto **caso a cadente nota**, è possibile determinare esplicitamente l'indice di resistenza.

Consideriamo la formula di Colebrook-White,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{r}{3.71D} \right).$$

Non è possibile determinare esplicitamente  $\lambda$  poiché questo compare anche nel termine logaritmico di destra. Nei problemi a cadente nota, però, il termine  $\text{Re} \sqrt{\lambda}$  può essere calcolato pur non essendo noti né  $\text{Re}$  né  $\lambda$ . Vediamo come:

per il tratto di condotta di diametro  $D_1$ , dalla formula di Darcy-Weissbach ricaviamo  $\lambda_1$

$$\lambda_1 = \frac{2gD_1 J_1}{V_1^2}$$

Ora calcoliamo  $\text{Re}_1 \sqrt{\lambda_1}$ :

$$\begin{aligned} \text{Re}_1 \sqrt{\lambda_1} &= \frac{\rho V_1 D_1}{\mu} \frac{\sqrt{2gD_1 J_1}}{V_1} \\ &= \frac{\rho D_1}{\mu} \sqrt{2gD_1 J_1}. \end{aligned}$$

$\text{Re}_1 \sqrt{\lambda_1}$  è quindi un valore noto poiché non dipende da  $V_1$ , ovvero dalla portata. Allora dalla formula di Colebrook-White si può ricavare esplicitamente  $\lambda_1$ :

$$\lambda_1 = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{\text{Re}_1 \sqrt{\lambda_1}} + \frac{r_1}{3.71D_1} \right) \right]^{-2}.$$

A questo punto, determiniamo la velocità  $V_1$  utilizzando ancora la formula di Darcy-Weissbach,

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gD_1 J_1}{\lambda_1}}$$

ed infine la portata,  $Q = V_1 A_1$ .

Per valutare il dislivello tra i peli liberi dei due serbatoi basta risolvere l'equazione dell'energia tra il serbatoio di monte e la sezione di sbocco della tubazione:

$$\tilde{z}_M - \tilde{z}_V = 0.5 \frac{V_1^2}{2g} + J_1 L_1 + n \frac{V_2^2}{2g} + J_2 L_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}.$$

La linea dei carichi totali e la piezometrica sono le stesse dell'esercizio precedente rappresentate in Fig. 40.

Si noti che il tratto di tubo di diametro  $D_2$  è liscio, per cui per determinare  $\lambda_2$  si deve cercare sull'abaco di Moody il valore sulla curva dei tubi lisci corrispondente a  $Re_2$ . In alternativa, si usa la formula per tubi lisci

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{Re_2 \sqrt{\lambda_2}} \right).$$

Tale formula è implicita, e si risolve iterativamente con il metodo illustrato in precedenza. Si noti che non è possibile utilizzare come valore di primo tentativo per il ciclo quello del moto assolutamente turbolento (condizione che non esiste nel caso di tubi lisci).

### 2.2.8 Esercizio 8

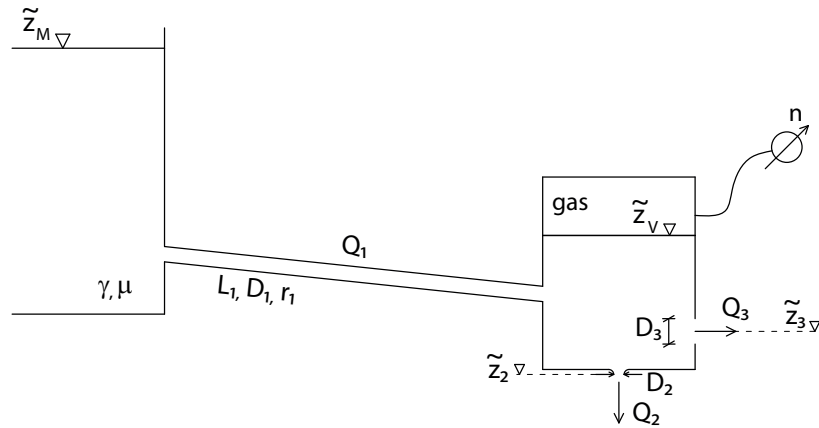


Figura 42: Esercizio 8.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 42. Nel serbatoio di valle, di volume finito e in pressione, sono presenti un foro circolare ben raccordato sul fondo e un foro circolare a spigolo vivo sulla parete verticale di destra. Sono noti: la geometria del sistema, le proprietà del fluido, la pressione indicata dal manometro metallico  $n$ , le quote geodetiche dell'interfaccia tra fluido e gas nel serbatoio di valle,  $\tilde{z}_v$ , della sezione di uscita dal foro sulla base,  $\tilde{z}_2$ , e del baricentro del foro sulla parete laterale,  $\tilde{z}_3$ .

- Determinare la quota geodetica del pelo libero del serbatoio di monte,  $\tilde{z}_M$ ;
- tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.

#### Svolgimento:

Siano  $Q_1$  la portata circolante nella condotta,  $Q_2$  e  $Q_3$  quelle uscenti dai fori sul fondo e sulla parete verticale del serbatoio di valle, rispettivamente.

Nel serbatoio di valle, per l'equazione di continuità, la somma delle portate entranti deve uguagliare la somma di quelle uscenti. Essendo  $Q_2$  e  $Q_3$  uscenti dal serbatoio,  $Q_1$  deve essere entrante, di conseguenza la portata  $Q_1$  nella condotta scorre da sinistra verso destra. Inoltre

$$Q_1 = Q_2 + Q_3.$$

Poiché nel serbatoio di valle è presente un gas in pressione, il carico totale nella sezione di sbocco della tubazione vale

$$\tilde{z}_v + \frac{n}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}.$$

Allora l'equazione dell'energia tra il serbatoio di monte e la sezione di sbocco della condotta risulta

$$\tilde{z}_M = 0.5 \frac{V_1^2}{2g} + J_1 L_1 + \tilde{z}_V + \frac{n}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}.$$

Per determinare  $\tilde{z}_M$  è necessario calcolare prima la portata  $Q_1$  dall'equazione di continuità per il serbatoio di valle. Si noti che dato che  $Q_1$  scorre da sinistra verso destra, deve risultare  $\tilde{z}_M > \tilde{z}_V + \frac{n}{\gamma}$ .

La portata uscente  $Q_2$  dal foro sulla base del serbatoio si calcola come efflusso da foro circolare ben raccordato, ovvero

$$Q_2 = C_v A_2 \sqrt{2gh_2}$$

dove  $A_2 = \pi D_2^2/4$  e  $h_2$  è il carico sulla luce,

$$h_2 = \tilde{z}_V + \frac{n}{\gamma} - \tilde{z}_2.$$

$Q_3$  si calcola dalla formula dell'efflusso da luce a spigolo vivo:

$$Q_3 = C_v C_c A_3 \sqrt{2gh_3}$$

dove  $A_3 = \pi D_3^2/4$  e  $h_3$  è il carico sul baricentro della luce (nell'ipotesi che  $h_3 \gg D_3$ ),

$$h_3 = \tilde{z}_V + \frac{n}{\gamma} - \tilde{z}_3.$$

Note  $Q_2$  e  $Q_3$ , si ricava  $Q_1 = Q_2 + Q_3$ ; quindi si calcolano  $V_1$ ,  $Re_1$ ,  $\lambda_1$  e  $J_1$ , che inseriti nell'equazione dell'energia consentono di stimare l'unica incognita,  $\tilde{z}_M$ . In Fig. 43 sono illustrati gli andamenti della linea dei carichi totali e della piezometrica.

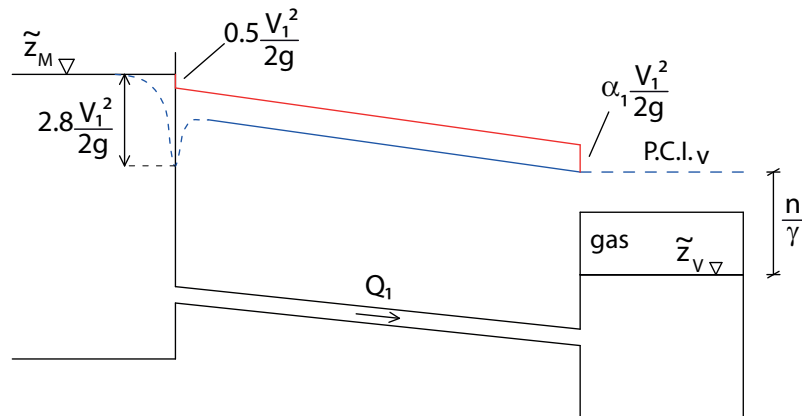


Figura 43: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 8.

### 2.2.9 Esercizio 9

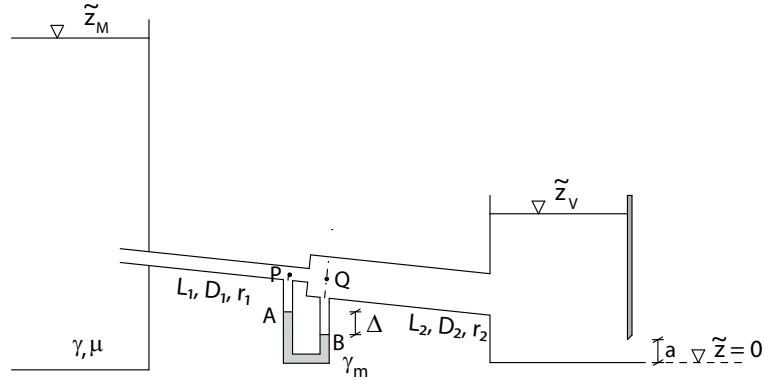


Figura 44: Esercizio 9.

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 44. Nel sistema è stato inserito un manometro differenziale a cavallo tra i due tratti di condotta. Si suppongano trascurabili le perdite di carico distribuite tra le sezioni di applicazione del manometro. Inoltre, nel serbatoio di valle è presente una paratoia di altezza  $a$  e lunghezza  $L$  (in direzione ortogonale al foglio).

Sono noti: la geometria del sistema, le proprietà dei fluidi e la lettura del manometro  $\Delta$ .

- Determinare le quote geodetiche dei peli liberi dei serbatoi,  $\tilde{z}_M$  e  $\tilde{z}_V$ ;
- la portata,  $Q$ ;
- tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.

#### Svolgimento:

Per la continuità del serbatoio di volume finito di destra, la portata uscente dall'efflusso deve essere pari a quella entrante dalla condotta,  $Q$ . Di conseguenza, nella condotta la portata scorre da sinistra verso destra e deve risultare  $\tilde{z}_M > \tilde{z}_V$ .

Scriviamo l'equazione dell'energia tra le sezioni  $P - P$  e  $Q - Q$ , in corrispondenza delle quali è applicato il manometro, sapendo che  $H_{m,P} > H_{m,Q}$ :

$$\tilde{z}_Q + \frac{p_Q}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = \tilde{z}_P + \frac{p_P}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

l'unica perdita di carico è quella concentrata dovuta al brusco restringimento. Esplicitando la portata, si ottiene

$$\left( \tilde{z}_Q + \frac{p_Q}{\gamma} \right) - \left( \tilde{z}_P + \frac{p_P}{\gamma} \right) = \left[ \frac{\alpha_1}{A_1^2} - \frac{\alpha_2}{A_2^2} - \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 \right] \frac{Q^2}{2g}$$

Applicando la legge di Stevino tra i punti del manometro si ottiene

$$\left(\tilde{z}_Q + \frac{p_Q}{\gamma}\right) - \left(\tilde{z}_P + \frac{p_P}{\gamma}\right) = \Delta \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma},$$

per cui la portata può essere calcolata in modo diretto:

$$Q = \sqrt{2g\Delta \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} \left[ \frac{\alpha_1}{A_1^2} - \frac{\alpha_2}{A_2^2} - \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 \right]^{-1}}.$$

Per l'equazione di continuità, nel serbatoio di valle la portata entrante deve essere pari a quella uscente dalla paratoia. Utilizzando la formula per l'efflusso da paratoia:

$$Q = C_v C_c a L \sqrt{2g(\tilde{z}_v - C_c a)},$$

da cui si ricava l'unica incognita  $\tilde{z}_v$ :

$$\tilde{z}_v = C_c a + \frac{1}{2g} \left( \frac{Q}{C_v C_c a L} \right)^2.$$

Infine, per calcolare  $\tilde{z}_M$ , si risolve l'equazione dell'energia tra il serbatoio di monte e la sezione di sbocco della tubazione:

$$\tilde{z}_M = 1.16 \frac{V_1^2}{2g} + J_1 L_1 + \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} + J_2 L_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \tilde{z}_v.$$

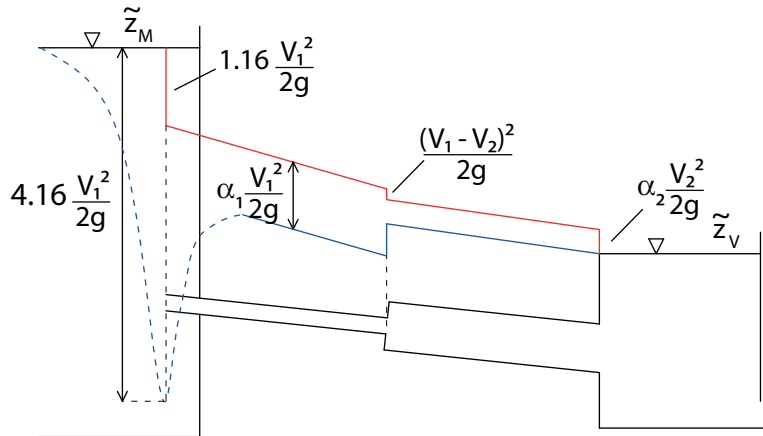


Figura 45: Linea dei carichi totali e piezometrica per l'esercizio 9.

**Nota:** nella pratica un manometro differenziale non viene mai inserito a cavallo di una perdita concentrata, perché non si è certi che la corrente, in corrispondenza del ramo di valle del manometro, sia gradualmente variata.

### 2.3 Spinte dinamiche in condizioni di moto turbolento

Dato un volume  $W$  di fluido in moto turbolento con velocità  $\bar{\mathbf{v}}$  e pressione  $p$ , vale la seguente

#### Equazione globale dell'equilibrio dinamico alla Reynolds

$$\langle \bar{\mathbf{I}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{\Pi}} \rangle + \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{M}}_m + \bar{\mathbf{M}}' = \bar{\mathbf{0}}$$

dove le parentesi angolari  $\langle \cdot \rangle$  indicano l'operazione di media alla Reynolds, e:

$$\langle \bar{\mathbf{I}} \rangle = -\frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle dW \quad \text{risultante delle inerzie locali medie}$$

$$\langle \bar{\mathbf{\Pi}} \rangle = \int_A \langle \bar{\Phi}_n \rangle dA \quad \text{spinta media esercitata dall'esterno sulla superficie di contorno } A$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \int_W \rho \bar{\mathbf{f}} dW \quad \text{forza di massa}$$

$$\bar{\mathbf{M}}_m = \int_A \rho \langle (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \rangle \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle dA \quad \text{flusso di quantità di moto medio attraverso il contorno } A$$

$$\bar{\mathbf{M}}' = \int_A \rho \langle (\bar{\mathbf{v}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{v}}' \rangle dA \quad \text{flusso di quantità di moto turbolento attraverso il contorno } A.$$

$\bar{\Phi}_n$  è lo sforzo agente sulla superficie di contorno  $A$  di normale  $\hat{\mathbf{n}}$ ;  $\langle \bar{\mathbf{v}} \rangle$  e  $\bar{\mathbf{v}}'$  sono, rispettivamente, la media e la fluttuazione turbolenta della velocità:  $\bar{\mathbf{v}} = \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle + \bar{\mathbf{v}}'$ .

Se il problema è stazionario in media, le inerzie locali medie sono nulle:  $\langle \bar{\mathbf{I}} \rangle = \bar{\mathbf{0}}$ .

Nel caso di fluido Newtoniano, la spinta media  $\langle \bar{\mathbf{\Pi}} \rangle$  è data dalla somma di due contributi:

$$\langle \bar{\mathbf{\Pi}} \rangle = \langle \bar{\mathbf{\Pi}}_p \rangle + \langle \bar{\mathbf{\Pi}}_\mu \rangle,$$

dove

$$\langle \bar{\mathbf{\Pi}}_p \rangle = \int_A \langle p \rangle \hat{\mathbf{n}} dA \quad \text{risultante delle pressioni medie agenti sul contorno}$$

$$\langle \bar{\mathbf{\Pi}}_\mu \rangle = - \int_A \mu \frac{\partial \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle}{\partial n} dA \quad \text{risultante degli sforzi viscosi medi agenti sul contorno.}$$

Se si considera una sezione (piana) trasversale ad una corrente gradualmente variata, allora la velocità media è ortogonale alla superficie e  $\langle \bar{\mathbf{v}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} = \langle |\bar{\mathbf{v}}| \rangle$ , dove  $\langle v \rangle = \langle |\bar{\mathbf{v}}| \rangle$ . In questo caso

$$\bar{\mathbf{M}}_m = \int_A \rho \langle v \rangle^2 dA \hat{\mathbf{n}}.$$

La media alla Reynolds della velocità  $\langle v \rangle$  varia sulla superficie  $A$ ; facendo riferimento alla media alla Reynolds della velocità media areale  $\langle V \rangle$ , definita come rapporto tra la portata  $Q$  e l'area della condotta  $A$ , si ottiene

$$\overline{\mathbf{M}}_m = \beta \rho Q \langle V \rangle \hat{\mathbf{n}}$$

dove

$$\beta = \frac{\int_A \langle v \rangle^2 dA}{\langle V \rangle^2 A}$$

è detto coefficiente di ragguglio del flusso di quantità di moto (circa uguale ad 1 in condizioni di moto turbolento).



### 2.3.1 Esercizio 1

Nell'ipotesi di moto stazionario e turbolento, determinare la spinta esercitata dalla corrente sul divergente tronco conico di Fig. 46. Si considerino noti la portata  $Q$  (da sinistra verso destra), la pressione media in corrispondenza del baricentro della sezione di ingresso,  $p_1$ , il peso specifico del fluido,  $\gamma$ , e la geometria del sistema ( $D_1, D_2, L$ ).

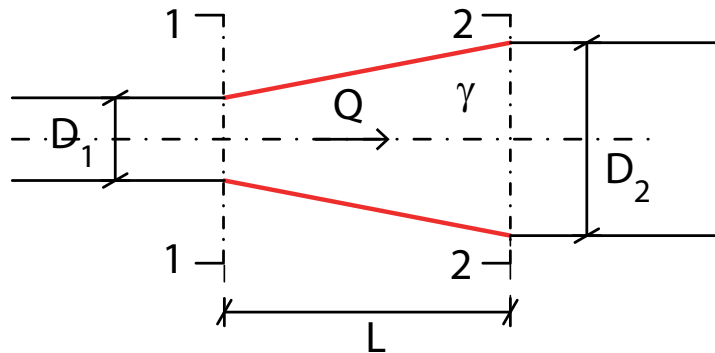


Figura 46: Esercizio 1.

#### Svolgimento:

Per calcolare la spinta dinamica esercitata dalla corrente sul divergente, consideriamo un volume di controllo tronco-conico compreso tra la sezione di ingresso, 1-1, e quella di uscita, 2-2, riempito di fluido  $\gamma$ , come illustrato in Fig. 47.

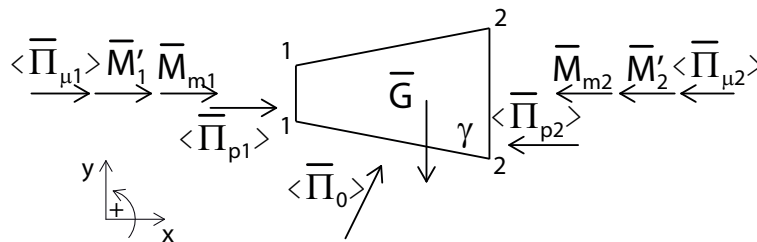


Figura 47: Volume di controllo per l'esercizio 1.

Sul volume di controllo agiscono:

- la spinta sulla superficie laterale,  $\langle \bar{\Pi}_0 \rangle$
- le spinte sulla superficie piana 1-1:  $\langle \bar{\Pi}_{p1} \rangle$ , risultante delle pressioni medie e  $\langle \bar{\Pi}_{\mu 1} \rangle$ , risultante degli sforzi viscosi medi

- le spinte sulla superficie piana 2 – 2,  $\langle \overline{\Pi}_{p2} \rangle$ , risultante delle pressioni medie e  $\langle \overline{\Pi}_{\mu2} \rangle$ , risultante degli sforzi viscosi medi
- la forza peso,  $\overline{\mathbf{G}}$  (verticale)
- il flusso di quantità di moto medio attraverso la sezione 1 – 1,  $\overline{\mathbf{M}}_{m1}$  (orizzontale poiché diretto come la corrente)
- il flusso di quantità di moto medio attraverso la sezione 2 – 2,  $\overline{\mathbf{M}}_{m2}$  (orizzontale poiché diretto come la corrente)
- il flusso di quantità di moto turbolento attraverso la sezione 1 – 1,  $\overline{\mathbf{M}}'_1$  (orizzontale poiché diretto come la corrente)
- il flusso di quantità di moto turbolento attraverso la sezione 2 – 2,  $\overline{\mathbf{M}}'_2$  (orizzontale poiché diretto come la corrente).

Le spinte dovute alle pressioni medie,  $\langle \overline{\Pi}_{p1} \rangle$  e  $\langle \overline{\Pi}_{p2} \rangle$ , agiscono in direzione ortogonale alla superficie, pertanto sono orizzontali. Le spinte dovute agli sforzi viscosi medi hanno componente in direzione tangenziale alla superficie nulla per simmetria della distribuzione di velocità; pertanto sono anch'esse orizzontali.

Per l'equazione globale d'equilibrio dinamico alla Reynolds,

$$\langle \overline{\Pi}_0 \rangle + \langle \overline{\Pi}_{p1} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{p2} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{\mu1} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{\mu2} \rangle + \overline{\mathbf{G}} + \overline{\mathbf{M}}_{m1} + \overline{\mathbf{M}}_{m2} + \overline{\mathbf{M}}'_1 + \overline{\mathbf{M}}'_2 = \overline{\mathbf{0}}.$$

La spinta cercata,  $\overline{\mathbf{S}}$ , è quella esercitata dal fluido sulla superficie, per cui

$$\overline{\mathbf{S}} = -\langle \overline{\Pi}_0 \rangle = \langle \overline{\Pi}_{p1} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{p2} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{\mu1} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{\mu2} \rangle + \overline{\mathbf{G}} + \overline{\mathbf{M}}_{m1} + \overline{\mathbf{M}}_{m2} + \overline{\mathbf{M}}'_1 + \overline{\mathbf{M}}'_2$$

Per calcolare  $\langle \overline{\Pi}_{\mu1} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{\mu2} \rangle$  dovremmo conoscere esattamente la distribuzione della derivata della velocità media nella direzione  $x$  lungo le superfici 1 – 1 e 2 – 2; ipotizzando che la variazione di geometria non sia troppo 'brusca', e, considerando che i due contributi hanno verso opposto, è lecito, in prima approssimazione, trascurare il contributo  $\langle \overline{\Pi}_{\mu1} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{\mu2} \rangle$ . Analogamente, per calcolare  $\overline{\mathbf{M}}'_1 + \overline{\mathbf{M}}'_2$  dovremmo conoscere la distribuzione della media del prodotto delle fluttuazioni di velocità; anche in questo caso i due termini hanno verso opposto, per cui è lecito trascurare il contributo  $\overline{\mathbf{M}}'_1 + \overline{\mathbf{M}}'_2$ .

Proiettando lungo gli assi  $x$  e  $y$ , si ottiene

$$\begin{aligned} S_x &= \langle \Pi_{p1,x} \rangle + \langle \Pi_{p2,x} \rangle + M_{m1,x} + M_{m2,x} \\ S_y &= G_y. \end{aligned}$$

Calcoliamo i contributi:

$$G_y = -\gamma W$$

dove  $W$  è il volume del tronco di cono:

$$W = \frac{\pi}{12} L (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2).$$

La spinta sulla superficie piana 1 – 1 è data da

$$\langle \Pi_{p1,x} \rangle = p_1 A_1$$

essendo  $p_1$  la pressione media nel baricentro della sezione 1 – 1 (nota) di area  $A_1 = \pi D_1^2/4$ . Sulla superficie 2 – 2

$$\langle \Pi_{p2,x} \rangle = -p_2 A_2,$$

con  $A_2 = \pi D_2^2/4$ . Per calcolare la pressione media  $p_2$ , applichiamo il bilancio energetico tra le sezioni 1 – 1 e 2 – 2:

$$\tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = \tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - m \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g},$$

dove con  $V_1$  e  $V_2$  si intendono le medie alla Reynolds delle velocità medie areali sulle sezioni 1 – 1 e 2 – 2, rispettivamente. Poiché la condotta è ad asse orizzontale, le quote geodetiche dei baricentri delle due sezioni coincidono:  $\tilde{z}_2 = \tilde{z}_1$ . Inoltre, per l'equazione di continuità  $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$ . Allora, si ottiene

$$p_2 = p_1 + \gamma \frac{Q^2}{2g} \left[ \frac{\alpha_1}{A_1^2} - \frac{\alpha_2}{A_2^2} - m \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 \right].$$

Restano da calcolare i flussi di quantità di moto:

$$M_{m1,x} = \beta_1 \rho Q V_1 = \beta_1 \frac{\gamma Q^2}{g A_1}$$

$$M_{m2,x} = -\beta_2 \rho Q V_2 = -\beta_2 \frac{\gamma Q^2}{g A_2}.$$

Infine, la spinta esercitata dal fluido sul divergente risulta essere:

$$S_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \beta_1 \frac{\gamma Q^2}{g A_1} - \beta_2 \frac{\gamma Q^2}{g A_2}$$

$$S_y = -\gamma W$$

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

e l'inclinazione di  $\bar{\mathbf{S}}$  rispetto all'orizzontale è

$$\theta = \arctan \frac{|S_y|}{|S_x|}.$$

### 2.3.2 Esercizio 2

Nell'ipotesi di moto permanente e turbolento (da sinistra verso destra), si determini la spinta che si scarica sul boccaglio tronco conico in Fig. 48. Si considerino noti: la distanza  $d$  tra la sezione contratta della corrente e la sezione di uscita; la pressione  $n$  misurata dal manometro metallico; la geometria del sistema ( $D_1$ ,  $D_2$ ,  $a$ ,  $L$ ,  $L_1$ ,  $\alpha$ ); il peso specifico  $\gamma$  e la densità  $\rho$  del fluido.

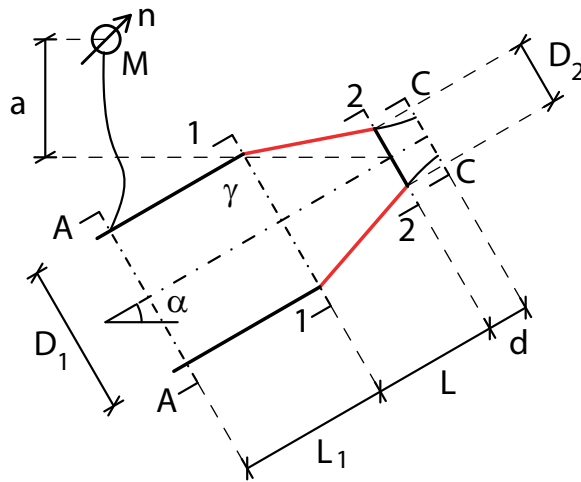


Figura 48: Esercizio 2.

#### Svolgimento:

Calcoliamo la portata  $Q$  transitante all'interno del boccaglio. A valle della sezione di uscita 2 – 2 del boccaglio, si forma la sezione contratta  $C - C$ . Applichiamo il bilancio energetico tra la sezione contratta e la sezione  $A - A$ , dove è applicato il manometro metallico:

$$\tilde{z}_C + \frac{p_C}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_C^2}{2g} = \tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_A^2}{2g} - J_1 L_1.$$

- In corrispondenza della sezione contratta, la pressione è nulla:  $p_C = 0$  (analogamente all'efflusso su luce verticale);
- Sulla sezione  $A - A$  la corrente è gradualmente variata, per cui la quota piezometrica si mantiene costante. All'interno del manometro metallico il liquido è fermo, per cui vale la legge di Stevino. In definitiva,

$$\tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma} = \tilde{z}_M + \frac{n}{\gamma}$$

dove  $\tilde{z}_A$  e  $p_A$  sono, rispettivamente, la quota geodetica e la pressione nel baricentro della sezione  $A - A$ , e  $\tilde{z}_M$  è la quota geodetica del baricentro del manometro  $M$ .

- Per la continuità si ha che  $V_A = \frac{Q}{A_1}$ ,  $V_C = \frac{Q}{A_C}$ ,

dove  $A_1 = \pi D_1^2/4$  e  $A_C = C_c A_2 = C_c \pi D_2^2/4$ .

- La perdita distribuita lungo il tratto di condotta di lunghezza  $L_1$  è pari a:

$$J_1 L_1 = \frac{\lambda_1 L_1 Q^2}{2g D_1 A_1^2}.$$

Sostituendo nella relazione precedente, si ottiene

$$\frac{Q^2}{2g} \left( \frac{\alpha_2}{C_c^2 A_2^2} - \frac{\alpha_1}{A_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{D_1 A_1^2} \right) = \frac{n}{\gamma} + \tilde{z}_M - \tilde{z}_C.$$

Dalla geometria si determina facilmente che

$$\tilde{z}_M - \tilde{z}_C = a - d \sin \alpha,$$

per cui la portata risulta

$$Q = \sqrt{2g \left( \frac{n}{\gamma} + a - d \sin \alpha \right) \left( \frac{\alpha_2}{C_c^2 A_2^2} - \frac{\alpha_1}{A_1^2} + \frac{\lambda_1 L_1}{D_1 A_1^2} \right)^{-1}}.$$

Questa relazione è implicita, poiché l'indice di resistenza  $\lambda_1$  dipende dalla portata stessa. Pertanto, si deve procedere con un processo iterativo a partire da una portata di primo tentativo  $Q^{(0)}$ . Il metodo iterativo è già stato illustrato negli esercizi precedenti e non viene, pertanto, ripetuto in questo esercizio.

Stimata la portata, passiamo al calcolo della spinta dinamica esercitata dal fluido sul boccaglio. Consideriamo un volume di controllo compreso tra la sezione iniziale del boccaglio, 1 - 1, e la sezione contratta (Fig. 49), riempito di fluido  $\gamma$ . Supponiamo di poter approssimare il volume compreso tra la sezione di uscita 2 - 2 e la sezione contratta con un tronco di cono avente lo stesso angolo di apertura del volume compreso tra la sezione 1 - 1 e la sezione 2 - 2.

Sul volume di controllo agiscono: la spinta sulla superficie laterale,  $\langle \overline{\Pi}_0 \rangle$ ; la spinta sulla superficie piana 1 - 1,  $\langle \overline{\Pi}_1 \rangle = \langle \overline{\Pi}_{p1} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{\mu 1} \rangle$ ; la spinta sulla superficie piana  $C - C$ ,  $\langle \overline{\Pi}_2 \rangle = \langle \overline{\Pi}_{p2} \rangle + \langle \overline{\Pi}_{\mu 2} \rangle$ ; la forza peso,  $\mathbf{G}$ ; il flusso di quantità di moto medio,  $\overline{\mathbf{M}}_{m1}$ , e il flusso di quantità di moto turbolento,  $\overline{\mathbf{M}}_1$ , attraverso la sezione 1 - 1; il flusso di quantità di moto medio,  $\overline{\mathbf{M}}_{m2}$ , e

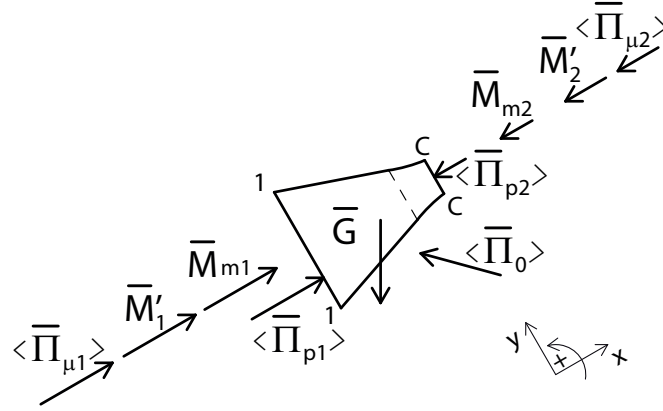


Figura 49: Volume di controllo per l'esercizio 2.

il flusso di quantità di moto turbolento,  $\bar{M}'_2$ , attraverso la sezione  $C - C$ . Per l'equazione globale di equilibrio,

$$\langle \bar{\Pi}_0 \rangle + \langle \bar{\Pi}_{p1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{p2} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{\mu 1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{\mu 2} \rangle + \bar{G} + \bar{M}_{m1} + \bar{M}_{m2} + \bar{M}'_1 + \bar{M}'_2 = \bar{0}.$$

Analogamente all'esercizio precedente, la somma dei flussi delle quantità di moto fluttuanti viene trascurata,  $\bar{M}'_1 + \bar{M}'_2 \cong \bar{0}$ . Per quanto riguarda le spinte dovute agli sforzi viscosi medi, sulla sezione contratta la derivata della velocità in direzione ortogonale alla parete è nulla, pertanto  $\langle \bar{\Pi}_{\mu 2} \rangle = \bar{0}$ ; inoltre, è lecito trascurare la spinta dovuta agli sforzi viscosi sulla sezione 1 - 1:  $\langle \bar{\Pi}_{\mu 1} \rangle \cong \bar{0}$ .

La spinta cercata,  $\bar{S}$ , è quella esercitata dal fluido sulla superficie, per cui

$$\bar{S} = -\langle \bar{\Pi}_0 \rangle = \langle \bar{\Pi}_{p1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{p2} \rangle + \bar{G} + \bar{M}_{m1} + \bar{M}_{m2}.$$

Consideriamo un sistema di riferimento ove l'asse  $x$  sia diretto come l'asse della condotta, e l'asse  $y$  sia ad esso ortogonale; quindi proiettando lungo gli assi  $x$  e  $y$ , si ottiene

$$S_x = \langle \Pi_{p1,x} \rangle + \langle \Pi_{p2,x} \rangle + M_{m1,x} + M_{m2,x} + G_x$$

$$S_y = G_y.$$

Calcoliamo i contributi:

$$|\bar{G}| = \gamma W = \gamma \frac{\pi}{12} (L + d) (D_1^2 + D_1 D_c + D_c^2),$$

$$G_x = -|\bar{G}| \sin \alpha,$$

$$G_y = -|\bar{G}| \cos \alpha,$$

dove  $D_c = C_c D_2$  è il diametro della sezione  $C_c$ .

$$\langle \Pi_{p1,x} \rangle = p_1 A_1$$

essendo  $p_1$  la pressione nel baricentro della sezione  $A_1$ . Per calcolare  $p_1$ , applichiamo il bilancio energetico tra la sezione 1 – 1 e la sezione  $A - A$ :

$$\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_A^2}{2g} - J_1 L_1.$$

Avendo le due sezioni lo stesso diametro, risulta  $V_1 = V_A$ ; inoltre, come dimostrato precedentemente,  $\tilde{z}_A + p_A/\gamma = \tilde{z}_M + n/\gamma$ , da cui

$$\begin{aligned} p_1 &= n + \gamma [(\tilde{z}_M - \tilde{z}_1) - J_1 L_1] \\ &= n + \gamma \left( a + L \sin \alpha - \frac{\lambda_1 L_1 Q^2}{2g D_1 A_1^2} \right). \end{aligned}$$

Allora,

$$\langle \Pi_{p1,x} \rangle = \left[ n + \gamma \left( a + L \sin \alpha - \frac{\lambda_1 L_1 Q^2}{2g D_1 A_1^2} \right) \right] A_1.$$

Sulla sezione contratta

$$\langle \Pi_{p2,x} \rangle = -p_C A_C = 0$$

essendo  $p_C = 0$ .

Restano da calcolare i flussi di quantità di moto:

$$\begin{aligned} M_{m1,x} &= \beta_1 \rho Q V_1 = \beta_1 \rho \frac{Q^2}{A_1}, \\ M_{m2,x} &= -\beta_2 \rho Q V_C = -\beta_2 \rho \frac{Q^2}{C_c A_2} \end{aligned}$$

Infine, la spinta esercitata dal fluido sul boccaglio risulta essere:

$$\begin{aligned} S_x &= \left[ n + \gamma \left( a + L \sin \alpha - \frac{\lambda_1 L_1 Q^2}{2g D_1 A_1^2} \right) \right] A_1 + \rho Q^2 \left( \frac{\beta_1}{A_1} - \frac{\beta_2}{C_c A_2} \right) - |\bar{\mathbf{G}}| \sin \alpha \\ S_y &= -|\bar{\mathbf{G}}| \cos \alpha \\ |\bar{\mathbf{S}}| &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \end{aligned}$$

e l'inclinazione di  $\bar{\mathbf{S}}$  rispetto all'orizzontale è

$$\theta = \arctan \frac{|S_y|}{|S_x|}.$$

### 2.3.3 Esercizio 3

Nell'ipotesi di moto stazionario, determinare la spinta esercitata sul divergente tronco conico di Fig. 50 dalla corrente, che scorre da sinistra verso destra, e dal fluido fermo nel serbatoio. Si considerino noti: la geometria del sistema ( $D_1$ ,  $D_2$ ,  $L$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ), il peso specifico  $\gamma$  e la densità  $\rho$  del fluido, la pressione  $n$  misurata dal manometro metallico.

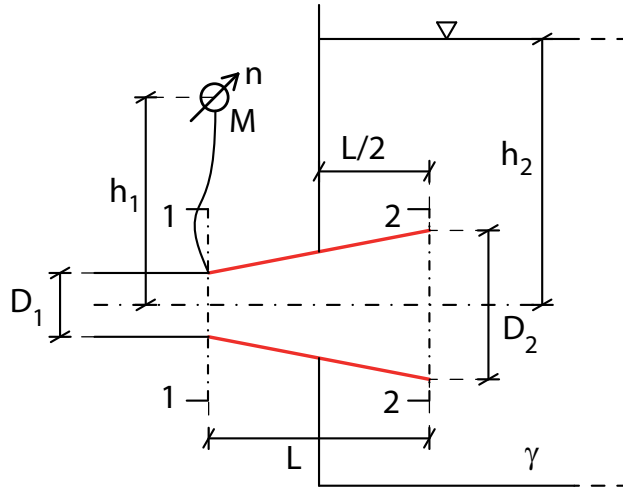


Figura 50: Esercizio 12.

#### Svolgimento:

Calcoliamo la portata  $Q$  transitante all'interno della condotta. Scriviamo il bilancio energetico tra la sezione iniziale del divergente, 1 - 1, e la sezione di sbocco nel serbatoio, 2 - 2:

$$\tilde{z}_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} - m \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \tilde{z}_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}.$$

Poiché la condotta ha asse orizzontale,  $\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2$ . Tra la sezione 1 - 1 e il baricentro del manometro la distribuzione delle pressioni è idrostatica, per cui

$$p_1 = n + \gamma h_1.$$

La sezione 2 - 2 è a contatto con il fluido fermo del serbatoio, per cui

$$p_2 = \gamma h_2.$$

Infine, applicando l'equazione di continuità, si ottiene

$$\frac{n}{\gamma} + h_1 + \alpha_1 \frac{Q^2}{2gA_1^2} - m \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 = h_2 + \alpha_2 \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$



da cui si ricava la portata:

$$Q = \sqrt{2g \left( h_2 - h_1 - \frac{n}{\gamma} \right) \left[ \frac{\alpha_1}{A_1^2} - \frac{\alpha_2}{A_2^2} - \left( \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2 \right]^{-1}}.$$

La spinta,  $\bar{\mathbf{S}}$ , esercitata sulla superficie del divergente è data dalla somma di due contributi: la spinta dinamica esercitata dalla corrente sulla superficie interna,  $\bar{\mathbf{S}}^{\text{int}}$ , e la spinta statica esercitata sulla parte di superficie esterna del divergente a contatto con il fluido fermo nel serbatoio,  $\bar{\mathbf{S}}^{\text{ext}}$ . Per cui la spinta risultante è:

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^{\text{int}} + \bar{\mathbf{S}}^{\text{ext}}.$$

Proiettando,

$$\begin{aligned} S_x &= S_x^{\text{int}} + S_x^{\text{ext}}, \\ S_y &= S_y^{\text{int}} + S_y^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

### Spinta dinamica esercitata dalla corrente

La corrente agisce su tutta la superficie del divergente (compresa tra le sezioni 1-1 e 2-2); consideriamo il volume di controllo di Fig. 51.

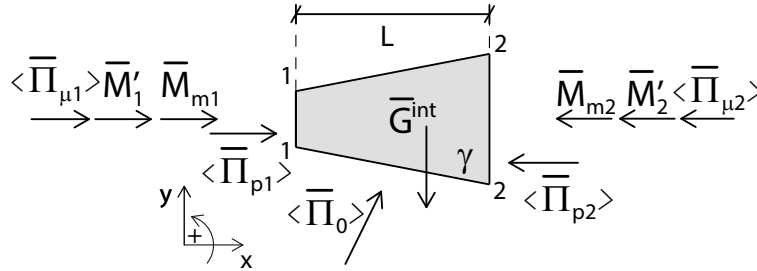


Figura 51: Volume di controllo per il calcolo della spinta dinamica esercitata dalla corrente.

$\langle \bar{\Pi}_0 \rangle$  agisce sulla superficie laterale del tronco di cono. Per l'equazione globale dell'equilibrio dinamico

$$\langle \bar{\Pi}_0 \rangle + \langle \bar{\Pi}_{p1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{p2} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{\mu 1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{\mu 2} \rangle + \bar{M}_{m1} + \bar{M}_{m2} + \bar{M}'_1 + \bar{M}'_2 + \bar{\mathbf{G}}^{\text{int}} = \bar{\mathbf{0}}$$

Analogamente agli esercizi precedenti, la somma dei flussi delle quantità di moto fluttuanti viene trascurata,  $\bar{M}'_1 + \bar{M}'_2 \cong \bar{\mathbf{0}}$ . Per quanto riguarda le spinte dovute agli sforzi viscosi medi, ipotizzando che la variazione di geometria non sia troppo 'brusca', e, considerando che i due contributi hanno verso opposto, si trascura il contributo  $\langle \bar{\Pi}_{\mu 1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{\mu 2} \rangle$ .

La spinta cercata è quella esercitata dal volume sulla superficie, per cui

$$\bar{\mathbf{S}}^{\text{int}} = -\langle \bar{\Pi}_0 \rangle = \langle \bar{\Pi}_{p1} \rangle + \langle \bar{\Pi}_{p2} \rangle + \bar{M}_{m1} + \bar{M}_{m2} + \bar{\mathbf{G}}^{\text{int}}.$$

Proiettando

$$S_x^{\text{int}} = \langle \Pi_{p1,x} \rangle + \langle \Pi_{p2,x} \rangle + M_{m1,x} + M_{m2,x}$$

$$S_y^{\text{int}} = G_y^{\text{int}}.$$

Il peso del fluido è dato da

$$G_y^{\text{int}} = -\gamma W^{\text{int}} = -\gamma \frac{\pi}{12} L (D_1^2 + D_1 D_2 + D_2^2).$$

Le spinte sulle basi piane 1 – 1 e 2 – 2 del tronco di cono si calcolano come

$$\langle \Pi_{p1,x} \rangle = p_1 A_1 = (n + \gamma h_1) \frac{\pi D_1^2}{4},$$

$$\langle \Pi_{p2,x} \rangle = -p_2 A_2 = -\gamma h_2 \frac{\pi D_2^2}{4}.$$

I flussi di quantità di moto sono dati da

$$M_{m1,x} = \beta_1 \rho \frac{Q^2}{A_1},$$

$$M_{m2,x} = -\beta_2 \rho \frac{Q^2}{A_2}.$$

Quindi risulta

$$S_x^{\text{int}} = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \rho Q^2 \left( \frac{\beta_1}{A_1} - \frac{\beta_2}{A_2} \right),$$

$$S_y^{\text{int}} = -\gamma W^{\text{int}}.$$

### Spinta statica esercitata dal fluido fermo nel serbatoio

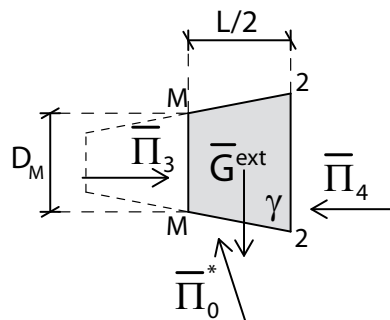


Figura 52: Volume di controllo per il calcolo della spinta statica esercitata dal fluido fermo nel serbatoio.

Come volume di controllo consideriamo la parte di tronco di cono a contatto con il fluido esterno nel serbatoio (compreso tra la sezione 2 – 2 e la sezione

$M - M$ ), come illustrato in Fig. 52, e consideriamola interamente riempita di fluido  $\gamma$ .

$\bar{\Pi}_0^*$  agisce sulla superficie laterale del tronco di cono. Per l'equazione globale dell'equilibrio (statico)

$$\bar{\Pi}_0^* + \bar{\Pi}_3 + \bar{\Pi}_4 + \bar{\mathbf{G}}^{\text{ext}} = \bar{\mathbf{0}}$$

la spinta cercata è quella esercitata dall'esterno sul volume, per cui

$$\bar{\mathbf{S}}^{\text{ext}} = \bar{\Pi}_0^* = -\bar{\Pi}_3 - \bar{\Pi}_4 - \bar{\mathbf{G}}^{\text{ext}}.$$

Proiettando

$$S_x^{\text{ext}} = -\Pi_{3,x} - \Pi_{4,x}$$

$$S_y^{\text{ext}} = -G_y^{\text{ext}}.$$

Il peso del fluido  $\gamma$  nel volume di controllo risulta

$$G_y^{\text{ext}} = -\gamma W^{\text{ext}} = -\gamma \frac{\pi}{12} \frac{L}{2} (D_M^2 + D_M D_2 + D_2^2),$$

dove  $D_M$  è il diametro in corrispondenza dalla sezione  $M - M$ , di ingresso del divergente nel serbatoio, che si calcola dalla proporzione

$$(D_2 - D_1) : L = (D_2 - D_M) : L/2,$$

per cui  $D_M = (D_2 + D_1)/2$ .

Le spinte sulle basi piane  $M - M$  e  $2 - 2$  del tronco di cono si calcolano come

$$\Pi_{3,x} = p_2 A_M = \gamma h_2 \frac{\pi D_M^2}{4},$$

$$\Pi_{4,x} = -p_2 A_2 = -\gamma h_2 \frac{\pi D_2^2}{4}.$$

Si osservi che le pressioni nei baricentri delle sezioni  $A_M$  e  $A_2$  coincidono e sono pari a  $p_2$ .

Si ricava quindi

$$S_x^{\text{ext}} = \gamma h_2 (A_2 - A_M),$$

$$S_y^{\text{ext}} = \gamma W^{\text{ext}}.$$

Infine, la spinta globale esercitata dal fluido sul boccaglio, risulta

$$S_x = S_x^{\text{int}} + S_x^{\text{ext}},$$

$$S_y = S_y^{\text{int}} + S_y^{\text{ext}},$$

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}.$$

e l'inclinazione di  $\bar{\mathbf{S}}$  rispetto all'orizzontale è

$$\theta = \arctan \frac{|S_y|}{|S_x|}.$$